Dependencia de Largo Alcance en Series Financieras

ANDRÉS SOSA

3er Taller Interdisciplinario en Sistemas Complejos

Facultad de Ciencias Económicas
Universidad de Buenos Aires
Buenos Aires – Argentina

6 DE DICIEMBRE DE 2019

Complejidad económica y econofísica

Complejidad Económica: Área en las ciencias que estudia cómo los elementos interactúan en un sistema, crean patrones generales y cómo los patrones a su vez hacen que los elementos cambien o se adapten.

Econofísica: Área multidisciplinaria que intenta combinar física, economía, matemáticas y finanzas. El origen se basa en tratar de estudiar problemas complejos en economía mediante soluciones que derivan de otras ciencas.

En la actualidad, **los métodos matemáticos y estadísticos** juegan un rol importante en las Finanzas. Esto se debe a las grandes cantidades de datos que pueden ser analizados y que sirven como la contraparte empírica a la teoría.

Complejidad económica y econofísica

Complejidad Económica: Área en las ciencias que estudia cómo los elementos interactúan en un sistema, crean patrones generales y cómo los patrones a su vez hacen que los elementos cambien o se adapten.

Econofísica: Área multidisciplinaria que intenta combinar física, economía, matemáticas y finanzas. El origen se basa en tratar de estudiar problemas complejos en economía mediante soluciones que derivan de otras ciencas.

En la actualidad, **los métodos matemáticos y estadísticos** juegan un rol importante en las Finanzas. Esto se debe a las grandes cantidades de datos que pueden ser analizados y que sirven como la contraparte empírica a la teoría.

ECONOMETRÍA FRACCIONAL

Modelos cuantitativos en Finanzas: cálculo estocástico

El panorama reinante en las finanzas en las últimas décadas se origina a comienzos del siglo anterior con la tesis de Bachelier.

Avances posteriores en el área matemática denominada CÁLCULO ESTOCÁSTICO y su aplicación a la valuación de activos sujetos a incertidumbre desemboca en **la fórmula de Black y Scholes**.

Este resultado es fundamental debido a que se utilizan hipótesis de mercados eficientes y ausencia de arbitraje.

El modelo asume que la dinámica del activo sigue un proceso estocástico denominado **movimiento browniano geométrico**. Este proceso de difusión presenta tendencia y volatilidad constante.

Esta última hipótesis, es refutada en la literatura. De maneera empírica se observan las denominadas **curvas de volatilidad implícita**. Por lo cual, es una simplificación de la realidad importante y puede derivar en consecuencias negativas en la valuación.

Hechos estilizados

Existen varios hechos estilizados que no son explicados mediante la utilización de los modelos usuales pero que empíricamente suceden. Entre ellos se destaca *el clustering de volatilidad* en algunas series financieras.

Esta propiedad es posible expresarla que al analizarla aparecen períodos de baja volatilidad y en otro momentos períodos de alta volatilidad.

Varias alternativas se han propuesto para su análisis. Entre ellos se destacan **la entropía de la información, la teoría de redes, las diferentes clases de fractales** y distintos procesos dinámicos estocásticos como son los procesos de Lévy.

Series Financieras: Dependencia de largo alcance

Definition

Una sucesión estacionaria de variables aleatorias $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ presenta dependencia de largo alcance si la sucesión de covarianzas $\rho(n) = Cov(X_k, X_{k+n})$ con $k, n \in \mathbb{N}$ satisface

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho(n)}{cn^{-\alpha}} = 1;$$

para alguna constante c y $\alpha \in (0, 1)$.

Interpretación: Las observaciones alejadas en el tiempo presentan mayor incidencia en observaciones actuales si el modelo es dependencia a largo plazo. Esto se debe a que la función de autocorrelación $\rho(n)$ tiende a cero cuando n tiende a infinito de manera “lenta”.

Cálculo Fraccional

El área matemática denominada CÁLCULO FRACCIONAL se desarrolla en la década de 1960 con los trabajos de Benoit Mandelbrot pero recién a finales del siglo sus técnicas son aplicadas a los mercados financieros.

El proceso estocástico que se utiliza como herramienta matemática para la construcción de la teoría se denomina **movimiento Browniano fraccional**.

Definition

El movimiento Browniano fraccional de **parámetro de Hurst** $H \in (0, 1)$, es $B^H = \left(B^H(t), t \geq 0\right)$, un proceso estocástico centrado, Gaussiano con trayectorias continuas cuya función de autocovarianza viene dada por

$$C_{B^H}(s, t) = \frac{1}{2}\left(s^{2H} + t^{2H} - |t - s|^{2H}\right).$$

Propiedades del movimiento Browniano fraccional

Propiedades similares al movimiento browniano: Se destacan las trayectorias continuas y no diferenciables, la presencia de distribución autosimilar y con incrementos estacionarios.

Propiedades diferentes al movimiento browniano: El movimiento Browniano fraccional no es una semimartingala (salvo $H = \frac{1}{2}$). No es posible utilizan la teoría integral de Ito (base del cálculo estocástico).

Consecuencia: El proceso no cumple la propiedad de Markov. Es posible que exista dependencia de su trayectoria histótica en la dinámica de la serie financiera.

Theorem

Sea B^H un movimiento Browniano fraccional, la sucesión de incrementos $\{X_k := B^H(k) - B^H(k-1)\}$ con $k \in \mathbb{N}$ ***tiene dependencia de largo alcance si se cumple que*** *$H > \frac{1}{2}$.*

Estimación del Parámetro de Hurst H

Al analizar alguna serie histórica se torna relevante estimar el parámetro de Hurst H que nos permite establecer si la serie presenta esta propiedad. Se utiliza la metodología denominada **rango escalado.**

Es necesario estimar el estadístico R/S. Para su construcción, dada una serie $X_1, X_2, ..., X_n$ se denota mediante $Y_t = \sum_{j=1}^{t} X_j$ para $t+k \leq n$ y se definen los estadísticos

$$R(t,k) = \max_{0\leq i\leq k}\left\{Y_{t+i} - Y_t - \frac{i}{k}(Y_{t+i} - Y_t)\right\} - \min_{0\leq i\leq k}\left\{Y_{t+i} - Y_t - \frac{i}{k}(Y_{t+i} - Y_t)\right\},$$

$$S^2(t,k) = \frac{1}{k}\sum_{j=t+1}^{t+k}\left(X_j - \hat{X}_{t,k}\right)^2.$$

El valor esperado cumple que

$$E\left(\frac{R(t,k)}{S(t,k)}\right) \approx Ck^H.$$

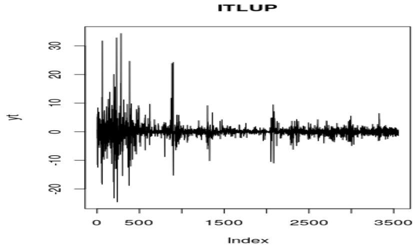
Aplicación en Índice asociado a la deuda soberana en Uruguay

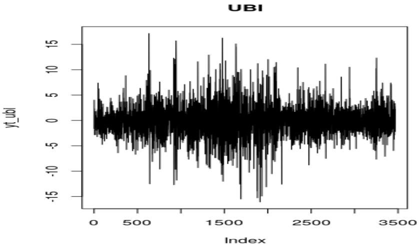
Los índices de la deuda soberana son el promedio ponderado de las tasas de rendimiento en los vencimientos que existen activos emitidos por el estado.

Caso de análisis: Se estudia la deuda soberana en Uruguay en dos de sus tres principales monedas de emisión posterior a la crisis financiera de 2002.

Datos: Frecuencia Diaria desde 2005 a 2019.

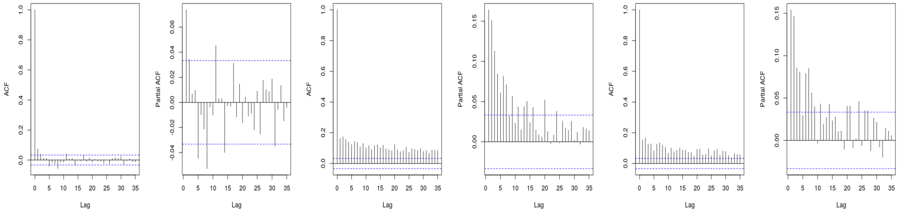
- Pesos Uruguayos: ITLUP
- Dólares: UBI





Volatilidad en los rendimientos del índice

Análisis previo: Función de autocorrelación y Función de autocorrelación parcial (caso ITLUP)



Resultados: En las series al cuadrado y valor absoluto (que se encuentran relacionadas a la volatilidad) son significativamente diferentes a cero al analizar varios rezagos hacia atrás.

Conclusión: Es de gran valor estudiar si nos encontramos frente a series financieras que presentan dependencia de largo alcance.

Estimación del parámetro de Hurst H

Estimación ITLUP

Met. Estimación	Caso cuadrado	Caso absoluto
Simple R/S	0.7308	0.7489
Corrected R over S	0.8407	0.8633
Empirical Hurst exponent	**0.7703**	**0.7876**
Corrected empirical Hurst	0.7158	0.7342

Estimación UBI

Met. Estimación	Caso cuadrado	Caso absoluto
Simple R/S	0.6987	0.7679
Corrected R over S	0.7887	0.8892
Empirical Hurst exponent	**0.7481**	**0.8304**
Corrected empirical Hurst	0.6953	0.7776

Conlcusión: Es adecuado utilizar modelos que consideren la dependencia de largo alcance para analizar la volatilidad de este índice.

Trabajo en proceso: métodologías fraccionales aplicadas a los modelos

Modelos discretos: Realizar la generalización de los modelos econométricos discretos denominada econometría fraccional. Dos opciones

- FIGARCH (fraccionally integrated generalized autorregresive conditional hetroscedasticity)
- LMSV (long memory stochastic volatility)

Modelos Continuos: Utilizar la generalización natural de los procesos estocásticos utilizados en los mercados financieros bajo los modelos de volatilidad estocástica. Se utilizan procesos de difusión para modelar la evolución de la volatilidad basados en ecuaciones diferenciales estocásticas que presentan como base de incertidumbre al movimiento Browniano fraccional.

Trabajo en Carpeta: Esudiar procesos que contengan como insumo al movimiento Browniano fraccional. Entre ellos se destaca el proceso Ornstein-Uhlenbeck fraccionario (FOU).

Muchas gracias