Patrones para el tratamiento de equilibrios puros en juegos matriciales de suma cero

TERCER TALLER INTERDISCIPLINARIO EN SISTEMAS COMPLEJOS

Dr. Ariel Arbiser
FCEyN UBA
Noviembre de 2019

Juegos matriciales y equilibrios puros para 2 jugadores y suma cero

$$\begin{array}{c} \\ H \\ T \end{array} \begin{array}{cc} H & T \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \end{array}$$

$max_i \; min_j \; (a_{i,j}) = -1, \; min_j \; max_i \; (a_{i,j}) = 1$

no hay equilibrios

$$\begin{array}{c} \\ T \\ B \end{array} \begin{array}{cc} L & R \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \end{array}$$

$max_i \; min_j \; (a_{i,j}) = min_j \; max_i \; (a_{i,j}) = 1$

hay un equilibrio

En esta clase de juegos, un equilibrio puro es un elemento máximo en su columna y mínimo en su fila.

Agregado de equilibrios

- Idea: dado un juego (de suma cero) sin equilibrios puros (i.e. sin valor), encontrar otro con equilibrios de Nash “lo más cerca posible”

  (Azamov 2010).

- Normas: norma discreta, norma 1, norma 2 (euclidiana).

Eliminación de equilibrios

- Idea: dado un juego (de suma cero) con equilibrios puros (i.e. con valor), encontrar otro sin equilibrios de Nash “lo más cerca posible”.

- Normas: norma discreta, norma 1, norma 2 (euclidiana).

Visión práctica

- Un juego sin equilibrios puros permite resolver situaciones de desventaja evidente, incentiva a la participación y lleva a la identificación de comportamientos.

- Podemos interpretar la “distancia” de un juego a otro sin equilibrios como un “grado de equilibrio” del primero.

Definiciones (distancia discreta)

- $S_{m,n}(D) = \{A \in D^{m\times n}$ / A tiene algún equilibrio$\}$

- $\sigma_{m,n}(D, A) = \min \{d(A, B) / B \in S_{m,n}(D)\}$,
  $\sigma_{m,n}(D) = \max_A \sigma_{m,n}(D, A)$ (Azamov)

- $\sigma'_{m,n}(D, A) = \min \{d(A, B) / B \notin S_{m,n}(D)\}$,
  $\sigma'_{m,n}(D) = \max_A \sigma'_{m,n}(D, A)$

- Interesan para distintos $D \subset R$.

En suma cero: grillas

- Todos los equilibrios coinciden en valor.

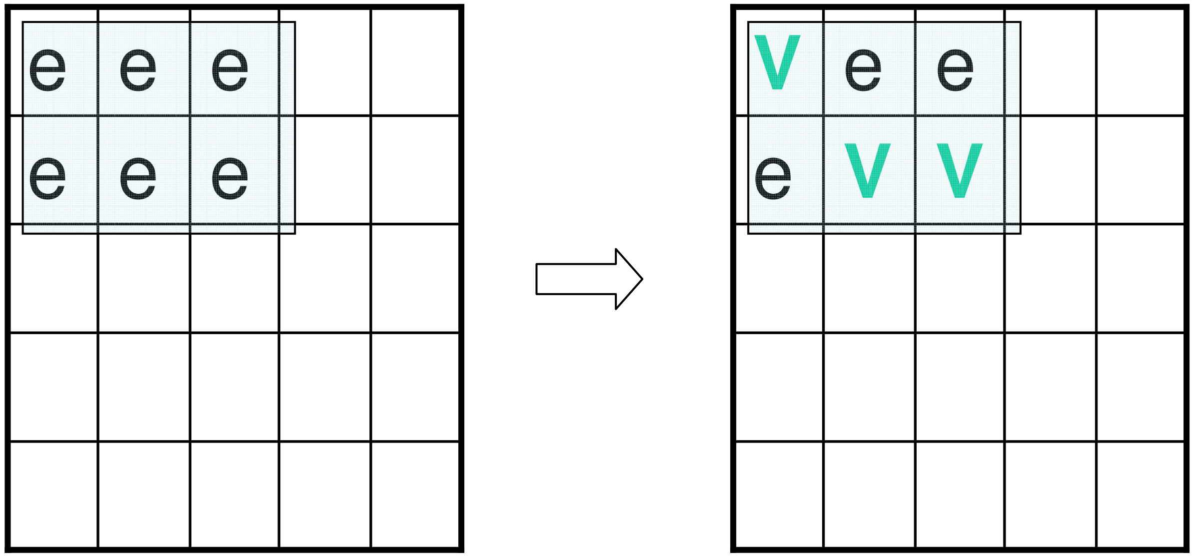
- Siempre se puede permutar filas y columnas de modo que los equilibrios formen un bloque superior izquierdo.

	e		e	e
	e		e	e

e	e	e		
e	e	e		

Reales

- Si hay varios equilibrios, para eliminarlos basta asignar valores chicos o grandes a lo largo de la *diagonal extendida* en el bloque.



Algoritmo para Z_2

Entrada: $A \in Z_2^{m \times n}$ ($m \geq 2$, $n \geq 2$).

Sea G la grilla de equilibrios de A.

Si G es vacía, se devuelve A (sin cambios).

En caso contrario, sea v el valor de los equilibrios ($v = 0$ ó 1).

Sea p una permutación entre filas y entre columnas tal que p(G) sea convexa con filas y columnas numeradas desde 1, y sea p^{-1} su permutación inversa.

Sea $m' \times n' = \dim p(G)$ ($m' \geq 1$, $n' \geq 1$).

Sea $A' = p(A) = (a'_{i,j})$ ($1 \leq i \leq m'$, $1 \leq j \leq n'$).

Algoritmo para Z_2 (sigue)

Si v = 0, A' tiene alguna columna de todos ceros.

Si hay al menos dos columnas de ceros, entonces:

cambiar $a'_{i,i} = 1$ para $0 \leq i \leq m'$

si $m' < n'$, cambiar $a_{m',j} = 1$ para $j > m'$

("el resto de la fila de la grilla").

Si la columna de ceros es una (la primera de A'), entonces:

Si todos los otros valores de A' son 1 (los hay porque $n \geq 2$),

entonces cambiar $a'_{1,1} = 1$, y $a'_{1,2} = 0$.

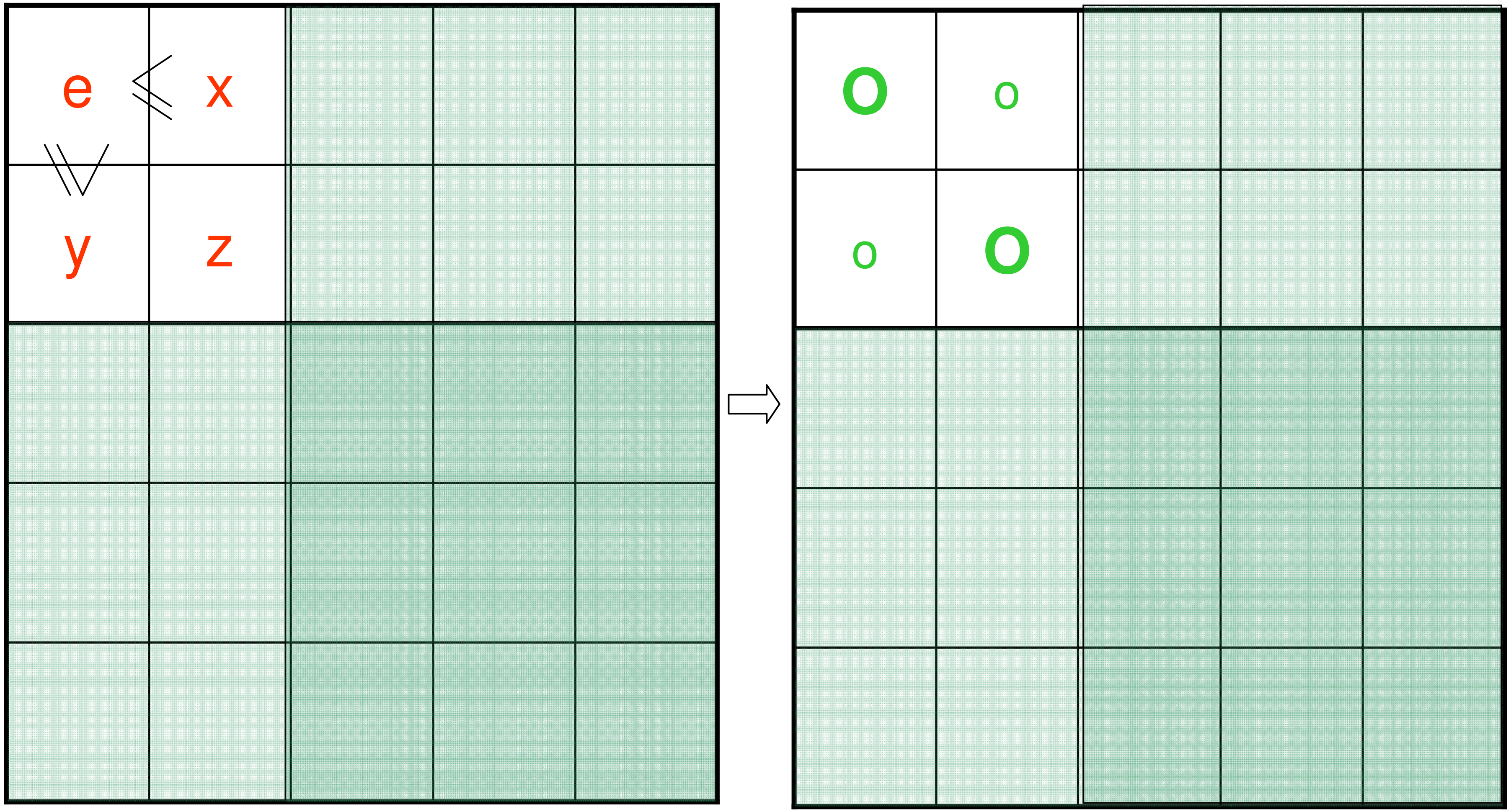
Si $\exists$ i, k / $a'_{i,k} = 0$, cambiar $a'_{i,1} = 1$.

Si v = 1, hay en A' una fila de todos unos y se procede como arriba en forma dual.

Salida: $p^{-1}(A')$.

Proposición: Los cambios son óptimos.

Idea para Z_N



Lema de preservación

Sean $A, A' \in D^{m\times n}$, $A = (a_{i,j})$, $A' = (a'_{i,j})$, *con* $m, n \geq 2$.

Si

$$a'_{i,j} = a_{i,j} \text{ para } i > 2 \text{ o } j > 2,$$

y

$$\min\{ a'_{1,1}, a'_{2,2} \} > \max\{ a'_{1,2}, a'_{2,1} \} \text{ o}$$
$$\max\{ a'_{1,1}, a'_{2,2} \} < \min\{ a'_{1,2}, a'_{2,1} \},$$

y

$$\min\{ a_{1,1}, a_{1,2} \} \geq \min\{ a'_{1,1}, a'_{1,2} \},$$
$$\min\{ a_{2,1}, a_{2,2} \} \geq \min\{ a'_{2,1}, a'_{2,2} \},$$
$$\max\{ a_{1,1}, a_{2,1} \} \leq \max\{ a'_{1,1}, a'_{2,1} \},$$
$$\max\{ a_{1,2}, a_{2,2} \} \leq \max\{ a'_{1,2}, a'_{2,2} \},$$

A no tiene equilibrios en las posiciones $\{(i, j) \,/\, i > 2 \text{ o } j > 2\}$

entontes *A' no tiene equilibrios.*

Forma de las reglas

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} b \geq a \geq c \\ (a',b',c',d')\ \textit{cruz} \end{array}$$

$$a \wedge b \geq a' \wedge b' \qquad a \vee c \leq a' \vee c'$$

$$c \wedge d \geq c' \wedge d' \qquad b \vee d \leq b' \vee d'$$

$$\{a', b', c', d'\} \subseteq \{a, b, c, d\}\ \textit{conexo},\ abcd = 0$$

La inclusión vale para todas las reglas excepto la 1.

Ejemplo: equilibrio = 1

1	1
0	2

Cambio: sin equilibrios

1	0
0	2

Reglas para distancia discreta y distancia 1

$\boxed{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}}$	2	2
$\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}$	1	1
$\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{matrix}$	1	1
$\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}$	2	2
$\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{matrix}$	2	2
$\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{matrix}$	2	2
$\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}$	2	2
$\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}$	1	1
$\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{matrix}$	1	1
$\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{matrix}$	1	1
$\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{matrix}$	1	2
$\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{matrix}$	2	3
$\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{matrix}$	1	2
$\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{matrix}$	1	2
$\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{matrix}$	1	1
$\begin{matrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{matrix}$	2	4
$\begin{matrix}2 & 2\\ 0 & 1\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{matrix}$	2	2
$\begin{matrix}2 & 2\\ 1 & 0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{matrix}$	2	2
$\begin{matrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{matrix}$	2	4
$\begin{matrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}2 & 3\\ 3 & 0\end{matrix}$	1	2

Algoritmo para Z_{q+1}, $q \geq 2$

Entrada: $A \in Z_{q+1}^{m \times n}$ ($m \geq 2$, $n \geq 2$).

Sea G la grilla de equilibrios de A. Si G es vacía, se devuelve A (sin cambios).

En caso contrario:

Sea v el valor de los equilibrios.

Sea p una permutación entre filas y entre columnas de A tal que p(G) sea convexa con filas y columnas numeradas desde 1, y sea p^{-1} su permutación inversa.

Sea $m' \times n' = \dim p(G)$ ($m' \geq 1$, $n' \geq 1$).

Sea $A' = p(A) = (a'_{i,j})$ ($1 \leq i \leq m'$, $1 \leq j \leq n'$).

Algoritmo para Z_{q+1}, $q \geq 2$ (sigue)

Si $1 < m' \leq n'$:

sea $v' = \begin{cases} v - 1 & \text{si } v > 0 \\ 1 & \text{si } v = 0 \end{cases}$

cambiar $a'_{i,i} = v'$ para $1 \leq i \leq m'$ (toda la diagonal mayor de la grilla)

si $m' < n'$

cambiar $a'_{m',j} = v'$ para $j > m'$ (resto de la fila m' de la grilla)

Si $1 < n' \leq m'$ el tratamiento es análogo al caso anterior.

Si $m' = 1 \leq n'$:

si $a'_{1,1} = a'_{1,2} = a'_{2,1} = a'_{2,2}$, cambiar // aplica la regla 1

$(a'_{1,1}, a'_{2,2}) = (a'_{1,1}+1, a'_{1,1}+1)$ si $a'_{1,1} < q$

$= (q - 1, q - 1)$ si $a'_{1,1} = q$

en caso contrario: // aplica alguna de las otras reglas

considerar la forma ordinal de $(a'_{1,1}, a'_{1,2}, a'_{2,1}, a'_{2,2})$,

para cada uno de los 19 casos la tabla indica los 1 ó 2 cambios necesarios sobre el orden de dichos índices, que se traduce en cambios sobre 1 ó 2 elementos en la sub matriz 2×2 superior izquierda de A'.

Si $n' = 1 \leq m'$ el tratamiento es análogo al caso anterior usando reglas duales.

Salida: $p^{-1}(A')$.

Proposición

Dada $A \in Z_{q+1}^{m \times n}$ con $m,n,q \geq 2$, $m,n < \infty$, el Algoritmo 2 devuelve una matriz $B \notin S_{m,n}(Z_{q+1})$.

- La cantidad de cambios en A es sub óptima.
- Una razón por la que tratamos separadamente el caso Z_2 es que todo bloque de equilibrios consiste en filas o columnas enteras; por otro lado, el algoritmo anterior resulta óptimo y es además mucho más sencillo.

Minimalidad

- En general, no se conseguirá un número mínimo de cambios si se simplifica de modo que las reglas a aplicar eliminen a los equilibrios de a uno por vez, ignorando la presencia de bloques. El tratamiento de bloques se hace necesario en el caso de varios equilibrios, lo que justifica la necesidad de un algoritmo como el anterior.

Corolario (distancia discreta)

Dada $A \in Z_d^{m\times n}$ *con* $m, n, d \geq 2$*, existe una matriz* $B \notin S_{m,n}(Z_d)$ *tal que*

$d(A,B) \leq \max\{m,n\} = \sigma'_{m,n}(Z_d)$.

Corolario (distancia discreta)

a) *Dada* $A \in R^{m\times n}$ *con* $2 \leq m, n < \infty$*, se puede hallar* $B \notin S_{m,n}(R)$ *tal que* $d(A,B) \leq \min\{m,n\}$ *en tiempo* $O(\min\{m,n\})$*.*

b) *Dada* $A \in R^{m\times n}$ *con* $2 \leq m, n < \infty$*, se puede hallar* $B \notin S_{m,n}(R)$ *tal que*

$\sigma'_{m,n}(R,A) \leq d(A,B) \leq \sigma'_{m,n}(R,A) + 1$

en tiempo $O(mn)$*.*

c) *Dada* $A \in D^{m\times n}$ *con* $2 \leq m, n < \infty$*,* $D \subseteq Z$ *finito,* $|D| \geq 1$*, se puede hallar* $B \notin S_{m,n}(D)$ *tal que*

$\sigma'_{m,n}(D,A) \leq d(A,B) \leq \sigma'_{m,n}(D,A) + 1$

en tiempo $O(mn)$*.*

Algoritmo *sin uso de permutaciones*

```
para i = 1, …, m, sea f_i = min { a_{i,j} / 1 ≤ j ≤ n }
para j = 1, …, n, sea c_j = max { a_{i,j} / 1 ≤ i ≤ m }
para i = 1, …, m
    para j = 1, …, n
        si a_{i,j} = f_i y a_{i,j} = c_j
            asignar v = a_{i,j}
            marcar la fila i y la columna j
        fin
    fin
fin
si v > 0, v’ = v – 1; si no, v’ = 1
i = j = 0
mientras i ≤ m o j ≤ n
    repetir
        si i > m o j > n, terminar
        si i < m, i++
        si j < n, j++
    hasta que i esté marcada o j esté marcada
    si i está marcada
        j = min { j' / j' ≥ j, j’ está marcada }
    si no
        i = min { i' / i' ≥ i, i’ está marcada }
    fin
    asignar a_{i,j} = v’
fin
```

Corolario (distancia discreta)

Dada $A \in D^{m\times n}$ con $m,n \geq 2$, si la cantidad de equilibrios de A es 1 o un número primo, entonces $1 \leq \sigma'_{m,n}(D, A) \leq 2$, y las matrices B del corolario (b) y (c) satisfacen

$1 \leq d(A,B) \leq 2$.

Proposición (valor inf. y sup.)

Dada $A \in D^{m\times n}$, $A = (a_{i,j})$ *con* $m,n \geq 2$, *las* $B = (b_{i,j})$ *del Corolario satisfacen*

$$max_i\ min_j\ (a_{i,j}) = max_i\ min_j\ (b_{i,j})$$

o exclusivo

$$min_j\ max_i\ (a_{i,j}) = min_j\ max_i\ (b_{i,j}).$$

- Los procesos de eliminación modifican el valor inferior o superior del juego, pero no ambos a la vez.

Proposición (distancia 1)

Dada $A = (a_{i,j}) \in Z_{q+1}{}^{m\times n}$ *con* $m,n \geq 2$, $q \geq 1$, *existe* $B = (a_{i,j}) \notin S_{m,n}(Z_{q+1})$ *tal que* $d_1(A,B) \leq q \max\{m, n\} = \sigma''_{m,n}(Z_{q+1})$ *(la cota se alcanza).*

Además $\max_i \min_j (a_{i,j}) = \max_i \min_j (b_{i,j})$ *o bien*
$\min_j \max_i (a_{i,j}) = \min_j \max_i (b_{i,j})$,

y $| \max_i \min_j (a_{i,j}) - \max_i \min_j (b_{i,j}) | + | \min_j \max_i (a_{i,j}) - \min_j \max_i (b_{i,j}) | = 1$.

Corolario (distancia 1)

Dada $A \in Z_{q+1}{}^{m\times n}$ *con* $m,n \geq 2$*, si el número de equilibrios de A es un número primo o 1, entonces* $1 \leq \sigma''_{m,n}(Z_{q+1}{}^{m\times n}, A) \leq 2q$*, y la matriz B de la proposición satisface*

$1 \leq d_1(A,B) \leq 2q.$

Reglas para distancia discreta y distancia 1

$\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}$	2	2	$\begin{matrix}1&2\\0&0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}1&2\\2&0\end{matrix}$	1	2
$\begin{matrix}0&0\\0&1\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}$	1	1	$\begin{matrix}1&2\\0&1\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}1&2\\2&0\end{matrix}$	2	3
$\begin{matrix}0&1\\0&0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix}$	1	1	$\begin{matrix}1&2\\0&2\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}1&0\\0&2\end{matrix}$	1	2
$\begin{matrix}0&1\\0&1\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}$	2	2	$\boxed{\begin{matrix}1&2\\0&3\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}1&0\\0&3\end{matrix}}$	1	2
$\begin{matrix}0&1\\0&2\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}1&0\\0&2\end{matrix}$	2	2	$\begin{matrix}1&2\\1&0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}1&2\\2&0\end{matrix}$	1	1
$\begin{matrix}0&2\\0&1\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}0&2\\1&0\end{matrix}$	2	2	$\begin{matrix}1&3\\0&2\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}1&3\\2&0\end{matrix}$	2	4
$\begin{matrix}1&1\\0&0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}$	2	2	$\begin{matrix}2&2\\0&1\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}2&1\\0&2\end{matrix}$	2	2
$\begin{matrix}1&1\\0&1\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}$	1	1	$\begin{matrix}2&2\\1&0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}1&2\\2&0\end{matrix}$	2	2
$\begin{matrix}1&1\\0&2\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}2&1\\0&2\end{matrix}$	1	1	$\begin{matrix}2&3\\0&1\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}2&1\\0&3\end{matrix}$	2	4
$\begin{matrix}1&1\\1&0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix}$	1	1	$\boxed{\begin{matrix}2&3\\1&0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}2&3\\3&0\end{matrix}}$	1	2

Preservación de la imagen

Con el fin de utilizar todos los valores de la matriz dada, cambian dos reglas:

	dist. discreta	dist. 1
$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix}$	2	2
$\begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{matrix}$	2	2

Proposición (distancia euclidiana)

Dada $A \in Z_{q+1}{}^{m\times n}$ *con* $m,n \geq 2$, $q \geq 1$, *existe una matriz* $B \notin S_{m,n}(Z_{q+1})$ *tal que* $d_2(A,B) \leq [\, q \sqrt{\max\{m,n\}}\,]$.

Corolario (distancia euclidiana)

Dada $A \in Z_{q+1}^{m\times n}$ *con* $m, n \geq 2$, $q \geq 1$, *si el número de equilibrios de A es un número primo o 1, entonces*

$$1 \leq \sigma^2_{m,n}(Z_{q+1}^{m\times n}, A) \leq [\, q\sqrt{2}\,]$$

y la matriz B de la proposición satisface

$$1 \leq d_2(A,B) \leq [\, q\sqrt{2}\,].$$

Corolario (distancia discreta)

Si $m,n,q \geq 2$, $C = (c_{i,j}) \in D = \mathrm{Z}_{q+1}{}^{m\times n}$, y ningún $c_{i,j}$ aparece más de 3 veces en C, entonces existen A, B $\in$ D tales que

$im(A) = im(B) = im(C)$

$A \in S_{m,n}(D)$, $B \notin S_{m,n}(D)$

$1 \leq d(A,B) \leq 2.$

- Diseño de juegos: distribución de pagos dados.

Intercambios de elementos

- En lugar de medir *cambios* en elementos, medir *intercambios* entre ellos.
- Da lugar a otra distancia.
- Ventaja de mantener el dominio con los números de apariciones de cada pago.

Proposición

Sean $m,n \geq 2$.

- *Si los elementos de una matriz $A \in R^{m \times n}$ son **todos diferentes**, existen en A dos elementos tales que al **intercambiarlos** se obtiene una matriz sin equilibrios.*
- *Además, si A tiene un equilibrio, esos elementos a intercambiar pueden tomarse de una misma **fila** o **columna**.*

Patrones de intercambio

Tabla 4. Las 4! = 24 formas ordinales para sub matrices de 2×2 que no repiten elementos con el fin de minimizar el número de intercambios: basta con efectuar un intercambio en forma (a) horizontal, (b) vertical o (c) diagonal. En cada grupo hay 8 casos y en cada caso son dos las opciones posibles, es decir el intercambio puede hacerse sobre uno u otro par de elementos siguiendo la dirección indicada.

a) Intercambio horizontal (8 casos, son los de (b) transpuestos):

0 2	0 3	1 2	1 3	2 0	2 1	3 0	3 1
1 3	1 2	0 3	0 2	3 1	3 0	2 1	2 0

b) Intercambio vertical (8 casos, son los de (a) transpuestos):

0 1	0 1	1 0	1 0	2 3	2 3	3 2	3 2
2 3	3 2	2 3	3 2	0 1	1 0	0 1	1 0

c) Intercambio diagonal (8 casos, son 4 y sus transpuestos):

0 2	0 3	1 2	1 3	2 0	2 1	3 0	3 1
3 1	2 1	3 0	2 0	1 3	0 3	1 2	0 2

¿Sub juegos sin equilibrios?

Si $A \in D^{m\times n}$, min $\{m,n\} \geq 2$ y max $\{m,n\} \geq 3$, entonces existe $B \subseteq A$ / $B \in S_{2\times 2}(D)$.

- No es posible anular los equilibrios en *todos los sub juegos no triviales*, porque siempre habrá uno equilibrado de dimensión 2×2 o mayor.
- La hipótesis de arriba es necesaria (un contraejemplo es *matching pennies*).

Conclusiones

- Eliminación de equilibrios puros obteniendo juegos a distancia mínima según distintas métricas, para juegos bipersonales de suma cero finitos o numerables, con dominios infinitos y finitos, preservando imagen, con una cantidad acotada de reglas dirigidas por patrones (*formas ordinales*).
- Un avance en la dirección de posibles acciones previas por diferencias de intereses entre las partes –a favor o en contra de que haya equilibrios– motivando el rediseño de la matriz de pagos.

Conclusiones

- Búsqueda de patrones sobre sub matrices, con libertad para el emparejamiento de filas y columnas sobre las cuales disparar las reglas.
- Hay reglas que son óptimas para una norma y no para otra.
- Para dar cotas alcanzaba la sub optimalidad, pero la optimalidad es alcanzable si en ciertos casos se usara como precondición la verificación de existencia de equilibrios.

Trabajo futuro

- Reducción de distancias de 2 a 1, a condición de elegir de manera óptima las dos filas y columnas sobre las que actúe la regla; a priori posible con un algoritmo $O(m^2n^2)$.
- Otros conceptos de solución: ε-equilibrios, equilibrios locales, equilibrios de estrategias mixtas.

Trabajo futuro

- Conjuntos de reglas que determinen acciones óptimas conjuntas para métricas con pesos en las posiciones u otras.
- Forma más fuerte de eliminación que no deje sub matrices equilibradas con ciertas dimensiones mayores (2×2 no se puede).
- Incorporar a los juegos el mismo proceso de negociación de cambios.