Dependencia de largo alcance en series financieras.

Juan Kalemkerian * Andrés Sosa **

3 de diciembre de 2019

Resumen

En la actualidad, los sistemas financieros son redes dinámicas, las cuales presentan variadas interacciones y deben adaptarse a las nuevas condiciones en su evolución temporal. Esta situación deriva en nuevas propiedades empíricas en series financieras en los mercados que son de relevancia estudiar. En este trabajo nos enfocamos en el problema de la determinación de la dependencia de largo alcance en series financieras. Esta clase de estudios son importantes debido a que los modelos económicos tradicionales basados en hipótesis de mercado eficiente y optimización de portafolio no cumplen esta propiedad. Existen varios enfoques para desarrollar esta temática, nosotros seleccionamos el cálculo fraccional, como generalización del enfoque clásico de mercados financieros a través de semimartingalas. Para finalizar, se analiza el caso de los índices de las curvas de rendimiento de la deuda soberana en Uruguay posterior a la crisis económica de 2002.

Palabras Claves: Complejidad Económica; Dependencia de Largo Alcance; Mercados Financieros; Volatilidad; Deuda Soberana.

1. Introducción

En la actualidad, el sistema financiero global es un sistema complejo a causa de la existencia de una gran cantidad de interconexiones entre los agentes. El análisis de estas relaciones, que sin ser predecibles son al menos manejables, generan consecuencias en la dinámica de los componentes que lo integran enfocando el centro de estudio a problemas que abarca la complejidad económica. Es importante, no solo analizar el comportamiento de los agentes participantes sino las dinámicas en las variables macroeconómicas que pueden influenciar su comportamiento al vislumbrar el sistema financiero como una red interconectada en la cual cada decisión afecta a diferentes agentes en diferentes momentos de tiempo. Un ejemplo en las variables macroeconómicas que motivan este trabajo es que ciertas variaciones en las tasas de interés a nivel internacional influyen de diferente grado en los activos financieros transados en el mercado secundario de bonos soberanos. Es decir de manera general, un cambio puntual en cierto componente y en cierto instante incide en los demás de manera dispar.

A su vez, cada sistema financiero específico es posible analizarlo como un sistema complejo dinámico y adaptativo en tiempos posteriores los cuales dependen de variados factores. En particular, se destaca que cada sistema financiero presenta una gran complejidad en los productos financieros que se emiten o se transan en el mercado los cuales heredan y a su vez

*Centro de Matemática, Facultad de Ciencias , Universidad de la República. email: jkalem@cmat.edu.uy
**Departamento de Métodos Cuantitativos, Facultad de Ciencias Económicas y de Administración, Universidad de la República. email: asosa@iesta.edu.uy

generan fuertes vínculos estructurales. Como ejemplo de relacionamiento y complejidad en los sistemas se destacan los mercados que tienen derivados financieros basados en cobertura de riesgo de tipo de cambio o riesgo de crédito. Otra característica que influye en la complejidad de los sistemas son las plataformas de información e intercambio internacionales que brindan la posibilidad que el sistema se expanda a una gran cantidad de agentes de diferentes dimensiones en tiempos muy breves.

Las decisiones de los agentes se encuentran relacionadas de manera bidireccional con ciertas coyunturas en la economía, entre ellas se destacan los ciclos económicos, la volatilidad en los mercados y la posibilidad de colapsos en ciertos sistemas. Estos vínculos se observan en mayor medida en el desarrollo de las crisis económicas las cuales demuestran una fuerte interconexión entre diferentes sistemas que la teoría los analizaba de manera independiente o sin valuar su relación existente. Estas inestabilidades son estudiadas en varios trabajos académicos con el fin de encontrar las causas y los efectos que generan. A su vez, las dinámicas temporales en algunas variables involucradas a los sistemas financieros durante las crisis demuestran la necesidad de incluir algunas hipótesis que en varios modelos teóricos no son contempladas. En este aspecto, la complejidad económica y la mayor complejidad matemática se proponen como un enfoque alternativo con el fin de comprender en mayor medida el comportamiento de la economía y las características empíricas en la dinámica de algunas series financieras. En la actualidad trabajos académicos consideran a los mercados financieros como sistemas abiertos interconectados que son influenciados por diversas clases de información.

La idea subyacente es estudiar a los mercados financieros no desde el centro de valuación de activos financieros que es el enfoque usual en los mercados sino que buscar explicar algunas de las propiedades estadísticas de las series financieras, las cuales no son justificables a partir de los modelos económicos tradicionales basados en la hipótesis de mercado eficiente y optimización de portafolio.

2. Modelación matemática de los mercados financieros

El estudio de los problemas en la economía en general mediante una perspectiva desde las ciencias como la matemática y la estadística datan desde el siglo XV con los trabajos de Sir William Petty (ver [33]). En particular en los mercados financieros, los avances en métodos cuantitativos han sido muy importantes. Es posible establecer que la nueva corriente de modelización matemática comienza con la tesis doctoral de Louis Bachelier en 1900 [2], donde se introduce la generalización en tiempo continuo del paseo aleatorio denominado movimiento browniano para la dinámica de precios de activos financieros sujetos a incertidumbre. Este avance, junto al desarrollo del área matemática denominada cálculo estocástico mediante los aportes de Norbert Wiener, Paul Levy, Joseph Doob y Kiyosi Ito, generaron en la mitad del siglo XX un aumento en los trabajo de investigación de los mercados financieros donde la aleatorización se convirtió en un fenómeno relevante en la dinámica temporal. Estas investigaciones derivaron en los trabajos [5] y [29] en los cuales Fisher Black, Myron Scholes y Robert Merton establecen un método de valuación de opciones libre de arbitraje el cual continua siendo de referencia en los mercados financieros en la actualidad.

Es posible establecer, que este resultado es el cimiento de un enfoque de estudio de los mercados financieros, el cual se expandió en gran manera al utilizar como base al movimiento Browniano (ver [30]). Las propiedades que se destacan en este proceso estocástico y se asumen en los modelos de activos financieros es que presenta trayectorias continuas en su evolución, que no son diferenciables en todo instante de tiempo (propiedad que se motiva en la irregularidad de las series financieras que se observa de manera empírica). También cumple las propiedades de independencia (variables aleatorias independientes) y de estacionariedad en los incrementos (no existe afectación en cuanto a traslaciones temporales). Además sus distribuciones finito dimensionales presentan distribución Gaussiana.

Las técnicas matemáticas que se utilizan son muy sofisticadas y es posible explicar fenómenos financieros de distintas categorías. Sin embargo, la interacción en los sistemas financieros actuales inducen evoluciones temporales en algunas variables macroeconómicas que no son reflejadas al utilizar como herramienta de modelización la base del movimiento browniano, ver [9]. Algunas de las hipótesis que asume este enfoque de modelación se intentan refutar en varios trabajos académicos, entre ellos se destacan que los incrementos en los precios de los activos financieros presentan distribución no estacionaria (ver [35]), la existencia de concentración de volatilidad en ciertos períodos de tiempo (ver [31]) y que la evolución dinámica de series financieras presenta diferentes maneras de dependencia frente a sus eventos históricos (ver [25]). Estas características son posibles analizarlas de manera empírica en la economía en sus diferntes niveles. A su vez, es posible observar trayectorias de variables macroeconómicas relevantes que se encuentran relacionadas a otros elementos propios del sistema financiero y también a elementos de otros sistemas financieros relacionados.

Es posible aplicar nuevos enfoques derivados del análisis de complejidad matemática para el estudio de los mercados financieros. Sin embargo, cuales metodologías aplicar para considerar los diversos aspectos que se han descripto está en discusión. Varias alternativas se han propuesto para el análisis de las características que se derivan de la complejidad financiera. Entre ellos se destacan la entropía de la información, la teoría de redes, las diferentes clases de fractales y distintos procesos dinámicos como son los procesos de Levy. Algunas de ellas son utilizadas en este trabajo.

En la actualidad, en el estudio de series temporales en los mercados financieros existen diferentes preocupaciones que se derivan en las fuertes estructuras de los sistemas. Entre ellas, se destacan las propiedades de dependencia y no-localidad. Estas se motivan por varias razones, entre ellas se encuentran que tanto las expectativas como las decisiones de los agentes participantes influyen en gran manera sobre las series y pueden verse vinculadas al comportamiento histórico que presentan (ver [11]).

En una serie temporal estacionaria la dependencia de largo alcance o memoria larga implica que existe una relación no despreciable entre el presente y su evolución histórica. La determinación de la existencia de esta propiedad en las series financieras es de gran importancia para los agentes participantes porque la mayoría de los modelos economoétricos usuales no la satisface. Lo que sucede es que en el caso que sea detectada esta dependencia puede presentar inconveniente estudiar modelos que no consideren esta propiedad. En la literatura, existen varios trabajos que se basan en las aplicaciones de esta propiedad en ciertos momentos de los ciclos económicos, en especial el estudio de burbujas financieras. Por más información ver [18].

2.1. Cálculo Fraccional

En el trabajo, se propone generalizar las propiedades que brinda la modelación mediante el movimiento Browniano con el fin de analizar los problemas que se derivan de la complejidad mediante la teoría matemática denominada cálculo fraccional. Esta área se desarrolla en la década de 1960 con los trabajos de Benoit Mandelbrot (ver [27]) pero recién a partir de finales del siglo XX sus técnicas son aplicadas a los mercados financieros. El objetivo es utilizar las herramientas del cálculo fraccional con el fin de reformular nuevos conceptos que permitan modelar la dinámica que existen en varios procesos temporales asociados a las finanzas. En la actualidad, algunas series históricas no presentan el comportamiento dinámico que se basa la teoría del movimiento browniano.

El proceso estocástico que se utiliza como herramienta matemática para la construcción de la teoría se denomina movimiento Browniano fraccional, el cual fue introducido en [24] por Andréi Kolmogorov.

Definición 1 *El movimiento Browniano fraccional de parámetro de Hurst* $H \in (0,1)$*, es* $B_H = (B_H(t), t \geq 0)$*, un proceso estocástico centrado, Gaussiano con trayectorias continuas cuya función de autocovarianza viene dada por*

$$C_{B_H}(s,t) = \frac{1}{2}\left(s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}\right). \tag{1}$$

Al analizar las propiedades que cumple este proceso se obtiene que varias se conservan en relación al movimiento browniano. Entre ellas se destaca que presenta trayectorias continuas y no diferenciables, presenta distribución gaussiana, autosimilar y con incrementos estacionarios. Es posible obtener desde la ecuación (1) que la covarianza de los incrementos es positiva en el caso de $H > \frac{1}{2}$ (proceso persistente) y que la covarianza es negativa cuando $H < \frac{1}{2}$ (proceso antipersistente). A su vez, cuando $H = \frac{1}{2}$ el movimiento Browniano fraccional corresponde al movimiento browniano estándar, ver [4]. A partir de esta propiedad se puede deducir que cuando $H \neq \frac{1}{2}$ el proceso estocástico B_H no es una semimartingala, por lo cual los métodos de cálculo que utilizan la teoría integral de Ito no son posibles de aplicar, ver [1]. Esta propiedad se torna importante porque el proceso no cumple la propiedad de Markov. Lo cual demuestra la existencia de dependencia en la evolución dinámica que depende posiblemente de parte de su trayectoria histórica.

El movimiento Browniano fraccional además de generalizar al movimiento browniano estándar, tiene la importante ventaja de que cuando $H > 1/2$, capta la dependencia de largo plazo, como lo muestra el Teorema 1. A continuación se establece la definición matemática de que una sucesión estacionaria presente dependencia de largo alcance.

Definición 2 *Una sucesión estacionaria de variables aleatorias* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *presenta dependencia de largo alcance si la sucesión de covarianzas* $\rho(n) = Cov(X_k, X_{k+n})$ *con* $k, n \in \mathbb{N}$ *satisface*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho(n)}{cn^{-\alpha}} = 1; \tag{2}$$

para alguna constante c *y* $\alpha \in (0,1)$*.*

Desde la definición 2 se desprende que la tendencia a cero de $\rho(n)$ cuando n tiende a infinito es "lenta". Sin embargo, en la literatura existen otras definiciones de sucesiones estacionarias que presentan dependencia de largo alcance, no todas equivalentes entre sí, pero en todas ellas la definición tiene que ver con una lenta convergencia a cero de la función $\rho(n)$ (ver por ejemplo [3], [17], [20] y [32]). La interpretación de esta propiedad es inmediata, por más que se aleje dos observaciones de la serie en el tiempo, la correlación entre ambos datos es mayor en una serie de dependencia larga que en una de dependencia corta. Por lo tanto, observaciones alejadas en el tiempo presentan mayor incidencia en observaciones actuales si el modelo es dependencia a largo plazo que si la serie fuera de dependencia a corto plazo (donde las correlaciones serían cercanas a cero).

En el Teorema 1 se establecen las condiciones que debe cumplir el parámetro de Hurst H en la definición 1 para que los incrementos en el movimiento Browniano fraccional sean una sucesión de variables aleatorias que presenta dependencia de largo alcance.

Teorema 1 *Sea B_H un movimiento Browniano fraccional, la sucesión de incrementos $\{X_k := B_k^H - B_{k-1}^H\}$ con $k \in \mathbb{N}$ tiene dependencia de largo alcance si se cumple que $H > \frac{1}{2}$.*

Demostración 1 *Sea*

$$\begin{aligned}
\rho_H(n) &= Cov(X_k, X_{k+n}) = Cov(B_k^H - B_{k-1}^H, B_{k+n}^H - B_{k+n-1}^H) \\
&= Cov(B_k^H, B_{k+n}^H) - Cov(B_k^H, B_{k+n-1}^H) - Cov(B_{k-1}^H, B_{k+n}^H) + Cov(B_{k-1}^H, B_{k+n-1}^H) \\
&= \frac{1}{2}\left((n+1)^{2H} + (n-1)^{2H} - 2n^{2H}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(n^{2H}(1+\frac{1}{n})^{2H} + n^{2H}(1-\frac{1}{n})^{2H} - 2n^{2H}\right) \\
&= \frac{n^{2H-2}}{2}\left(n^2(1+\frac{1}{n})^{2H} + n^2(1-\frac{1}{n})^{2H} - 2n^2\right) \\
&= \frac{n^{2H-2}}{2}\left(\frac{(1+\frac{1}{n})^{2H} + (1-\frac{1}{n})^{2H} - 2}{\frac{1}{n^2}}\right);
\end{aligned}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital y tomando límite cuando n tiene a infinito, se obtiene

$$\frac{(1+\frac{1}{n})^{2H} + (1-\frac{1}{n})^{2H} - 2}{\frac{1}{n^2}} \to 2H(2H-1)$$

por lo tanto,

$$\rho_H(n) \approx n^{2H-2}H(2H-1) \to 0 \qquad \forall H \in (0,1).$$

O sea que la tendencia a cero de la covarianza de los incrementos es del orden de n^{2H-2}. Además

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho_H(n)}{(2H-1)Hn^{2H-2}} = 1;$$

al considerar $c = (2H-1)H$ y $\alpha = 2 - 2H$ en la ecuación (2), se obtiene que si el parámetro $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ se cumple que $\alpha \in (0,1)$. Lo que concluye que el movimiento Browniano fraccional presenta dependencia de largo alcance si cumple que $H > \frac{1}{2}$.

Esta propiedad establece un fundamento en el análisis para enfocar los problemas asociados a la complejidad en las series financieras que se relaciona a la dependencia de largo alcance. Por lo cual, en primera instancia al analizar alguna serie histórica se torna relevante estimar el parámetro de Hurst H (ver [22]) que nos permite establecer si la serie presenta esta propiedad. En la literatura existen varios estimadores propuestos, en particular en el trabajo [34] se encuentra una descripción de algunos métodos junto con un estudio empírico. En este trabajo se utiliza el estimador más conocido, propuesto por Mandelbrot y Wallis en [28], denominado rango escalado.

Con el objetivo de estimar el parámetro H mediante el método denominado rango escalado, es necesario estimar el estadístico denominado rango ajustado R/S. Para su construcción, dada una serie de observaciones $X_1, X_2, ..., X_n$ se denota mediante $Y_t = \sum_{j=1}^{t} X_j$ para $t + k \leq n$ y se definen los estadísticos

$$R(t,k) = \max_{0\leq i\leq k}\left\{Y_{t+i} - Y_t - \frac{i}{k}(Y_{t+i} - Y_t)\right\} - \min_{0\leq i\leq k}\left\{Y_{t+i} - Y_t - \frac{i}{k}(Y_{t+i} - Y_t)\right\},$$

$$S^2(t,k) = \frac{1}{k}\sum_{j=t+1}^{t+k}\left(X_j - \hat{X}_{t,k}\right)^2 \quad \text{donde} \quad \hat{X}_{t,k} = \frac{1}{k}\sum_{j=t+1}^{t+k} X_j.$$

El valor esperado cumple que

$$\lim_{k\to\infty} E\left(\frac{R(t,k)}{S(t,k)}\right) \approx Ck^H; \tag{3}$$

por lo cual el logaritmo del estadístico rango ajustado R/S en función del logaritmo de k es aproximadamente una recta cuya pendiente es H. Luego, es posible estimar H por mínimos cuadrados, por más información ver [4].

2.2. Volatilidad en el mercado

La incertidumbre presente en la evolución temporal en las variables financieras es de gran importancia valuar. Se define la volatilidad como una medida de la intensidad en los cambios aleatorios o impredecibles en las series económicas. En general, es posible asegurar que la volatilidad no es constante y en consecuencia los modelos de series temporales tradicionales que suponen varianza constante (homocedasticidad), no son los más adecuados para modelar. A su vez, el concepto de dependencia de largo alcance aparece en varias áreas de la economía. En este trabajo se propone relacionar estos dos conceptos al enfocar el análisis de la existencia de dependencia de largo alcance en la volatilidad de las dinámicas de ciertas series financieras asociadas a la deuda soberana.

En el análisis de la volatilidad mediante los modelos econométricos discretos se destacan dos enfoques diferentes: los modelos GARCH y los modelos de volatilidad estocástica (SV). El primer enfoque, Engle [14] introduce una nueva clase de procesos denominados modelos ARCH, en los cuales la varianza condicional a la información pasada no es constante y depende del cuadrado de las innovaciones pasadas. Bollerslev [7] generaliza los modelos ARCH al proponer los modelos GARCH en los cuales la varianza condicional depende de los cuadrados de las perturbaciones y de las varianzas condicionales de períodos anteriores. En el segundo enfoque, la gran diferencia es que la volatilidad en el modelo se considera como una variable latente que no es observa en el mercado. Los primeros trabajos en este enfoque se basan en [15].

En el análisis de la volatilidad en los modelos en tiempo continuo, los más utilizados en la literatura son los denominados modelos de volatilidad estocástica. Estos procesos por lo general siguen una ecuación diferencial estocástica que tiene como base al movimiento browniano.

Se derivan en la existencia de las curvas de volatilidad implícita basadas en la aplicación del modelo de Black-Scholes-Merton (supuesto de existencia de volatilidad determinista). Esta situación empírica genera la necesidad de modelar el proceso de difusión mediante una función no constante en el tiempo. Uno de los modelos más utilizados en la literatura es el propuesto en [21]. Esto se debe a que presenta fórmula cerrada y su implementación computacional se realiza de manera sencilla.

El objetivo del trabajo es plantear la pregunta si es necesario utilizar modelos para el análisis de la volatilidad que consideran la existencia de dependencia de largo alcance en algunas series financieras. En particular, en el trabajo se utilizan dos series financieras de importancia en la deuda soberana en los países principalmente emergentes, que resumen la información en un valor de las tasas de rendimiento de los activos financieros soberanos emitidos por el país en cierta moneda. Esta modelación es posible establecerla de varias maneras, sin embargo la que se considera en el trabajo es adicionarle un movimiento Browniano fraccional a la parte estocástica.

3. Aplicación en la deuda soberana en Uruguay

Los países se encuentran frente al desafío de que los activos financieros que forman parte de su deuda soberana sean atractivos en cuanto a su liquidez a los inversores nacionales y extranjeros. Existen múltiples riesgos financieros en la economía global que deberían ser estudiados y comprender las interacciones con otros mercados y sus consecuencias es importante. Una característica relevante en el mercado es la creciente exposición a portafolios de alocación de inversiones extranjeras. Por lo cual, las expectativas de esta clase de agentes presentan un rol importante en sus comportamientos los cuales se amparan en la evolución histórica de algunas variables macroeconómicas. En este contexto, la modelación matemática de las variables asociadas a la deuda soberana puede ayudar a comprender su evolución.

Las curvas de rendimiento de la deuda soberana brindan la información de la tasa de rendimiento de un activo con respecto al vencimiento de su contrato. Con toda la información que contiene esta curva es posible establecer un índice que analice la evolución en su conjunto sujeto a ciertas características que presentan los activos que la integran. Estos índices se definen como el promedio ponderado de las tasas de rendimiento en los vencimientos que existen activos emitidos por el estado que cumplen requisitos en cuanto a su circulación en el mercado.

Las variaciones en estos índices de manera diaria generan importante información al mercado debido a que se encuentran asociadas a la rentabilidad en un portafolio genérico de inversión en todos los activos soberanos del país. En ciertas estrategias de inversión que presentan los agentes financieros se observa que la evolución de estos índices inciden en sus decisiones futuras.

En este trabajo, se utiliza el concepto de rendimiento que se define mediante

$$r_t = \ln\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right), \qquad t = 1, 2, \ldots, T;$$

para cierto índice I_t de análisis. Se estudia la deuda soberana en Uruguay en dos de sus tres principales monedas de emisión (pesos uruguayos y dólares) posterior a la crisis financiera de 2002. Para analizar la deuda es pesos uruguayos se considera el índice ITLUP (Índice de

Rendimiento de la Deuda Uruguaya Emitida en Pesos Corrientes) publicado de manera diaria por Bolsa Electrónica de Valores del Uruguay SA desde abril 2005 a julio 2019 de manera diaria (3556 datos). En cambio, para analizar la deuda soberana en dólares se utiliza el índice de riesgo país denominado UBI (Uruguay Bond Index) publicado de manera diaria por República AFAP desde enero 2005 a diciembre 2018 (3470 datos). En la Figura 1 se observan los rendimientos de los índices en todo el período de tiempo analizado.

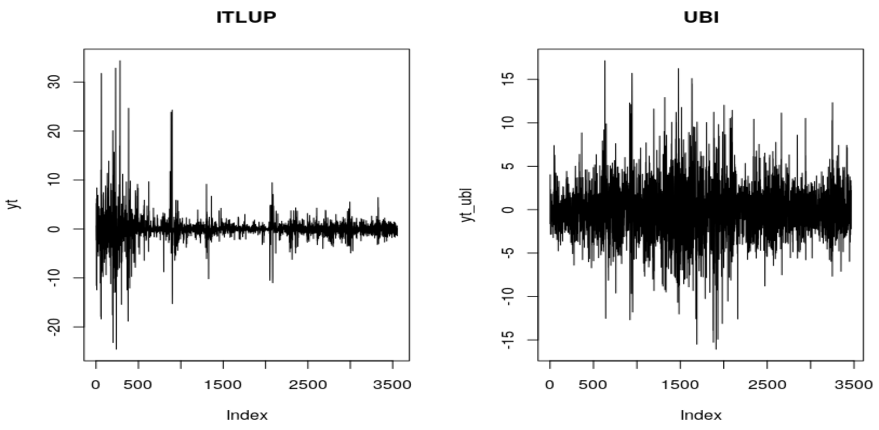

Figura 1: Rendimientos de los Índices.

Con el fin de analizar la dinámica en la volatilidad de la rentabilidad de los índices, se analizan los rendimientos al cuadrado y rendimientos absolutos. Esto se debe a que su dependencia implica que la volatilidad puede explicarse mediante la evolución histórica de la información. En la Figura 2 y la Figura 3 se encuentran las autocorrelaciones y las correlaciones parciales de las series rendimiento del índice, valor absoluto de los rendimientos y rendimientos al cuadrado en ITLUP y UBI respectivamente.

Al analizar los resultados en la Figura 2 y la Figura 3, se observa que en el caso de los rendimentos la dependencia no es significativa en el largo plazo, sin embargo en las series al cuadrado y valor absoluto (que se encuentran relacionadas a la volatilidad) la dependencia en estas variables son significativamente diferentes a cero al analizar varios rezagos hacia atrás. Además, en la Figura 4 se estudia la dependencia con el tiempo de los rendimientos al cuadrado y absolutos, en la cual se observa la relación existente en estas series. Este análisis permite concluir que es de gran valor estudiar si nos encontramos frente a series financieras que presentan dependencia de largo alcance. En caso de ser afirmativo, cualquier modelo a proponer para la dinámica de estas series financieras deberían ser capaz de adecuarse a dicha propiedad empírica.

La propuesta es utilizar modelos econométricos donde se considere la posibilidad de dependencia de largo alcance en la evolución. Como se observa en la Sección 2.1, al utilizar el cálculo fraccionario es posible encontrar una manera de modelar esta propiedad en el caso de que el parámetro de Hurst H cumpla que sea mayor a 0.5. En esta serie, vamos a aplicar el estimador propuesto en la ecuación (3) para analizar si existe indicios de larga dependencia. Las estimaciones son realizadas en Project R y los resultados se encuentran en la Tabla 1 y en la Tabla 2.

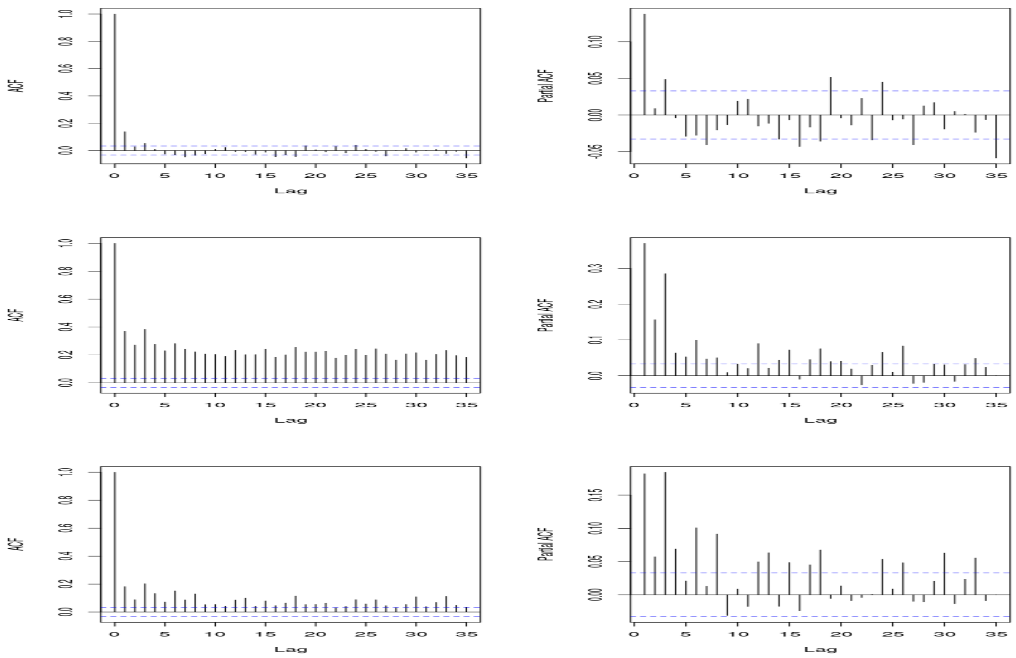

Figura 2: Autocorrelación y Correlación parcial en rendimientos de ITLUP. De arriba a abajo: rendimiento del índice, rendimientos absolutos y rendimientos al cuadrado.

Met. Estimación	Parámetro (caso cuadrado)	Parámetro (caso absoluto)
Simple R/S	0.7308	0.7489
Corrected R over S	0.8407	0.8633
Empirical Hurst exponent	0.7703	0.7876
Corrected empirical Hurst	0.7158	0.7342

Tabla 1: Índice ITLUP

Con las estimaciones del parámetro H mayor a 0,5 en todos los casos analizados, se observaría la necesidad de utilizar modelos que consideren la dependencia de largo alcance para analizar la volatilidad de este índice que puede ser asociada a la complejidad financiera actual en la deuda soberana.

4. Propuestas de modelos que consideran la dependencia de largo alcance

Debido a la presencia de $H > 0{,}5$ en los índices relacionados a la deuda soberana en Uruguay es necesario presentar propuestas de modelos que contemplen esta propiedad. Se proponen dos enfoques que consideran la propiedad de dependencia de largo alcance en las series financieras. Esto nos permite mayor generalidad en el análisis en la adaptación y la evolución a los diferentes sistemas y sus interacciones.

En primer lugar, una herramienta posible es aplicar la generalización de los modelos econométricos discretos denominada econometría fraccional. Los dos manera discretas esta-

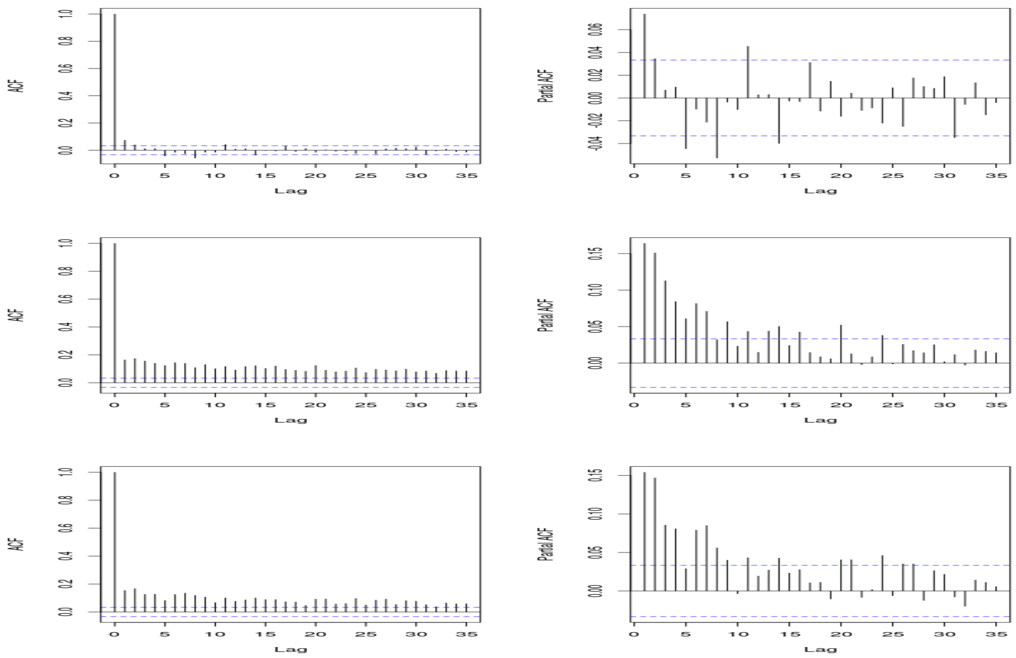

Figura 3: Autocorrelación y Correlación parcial en rendimientos de UBI. De arriba a abajo: rendimiento del índice, rendimientos absolutos y rendimientos al cuadrado.

Met. Estimación	Parámetro (caso cuadrado)	Parámetro (caso absoluto)
Simple R/S	0.6987	0.7679
Corrected R over S	0.7887	0.8892
Empirical Hurst exponent	0.7481	0.8304
Corrected empirical Hurst	0.6953	0.7776

Tabla 2: Índice UBI.

blecidas en la Sección 2.2 de análisis de volatilidad se extienden mediante herramientas del cálculo fraccional. En primer lugar, se encuentran los denominados FIGARCH (fraccionally integrated generalized autorregresive conditional hetroscedasticity) que son la extensión de los modelos GARCH y además se encuentran los LMSV (long memory stochastic volatility) son la extensión de los modelos SV.

En la actualidad existen varios trabajos académicos que aplican los modelos FIGARCH en la investigación en mercados financieros, entre ellos se destaca uno de los trabajos pioneros [8]. Existen varias preguntas no resueltas en cuanto a su desarrollo teórico y la relación con otros procesos estocásticos. En el contexto de los modelos LMSV, se propone que el logaritmo de la volatilidad es un proceso ARFIMA. Los primeros trabajos académicos que utilizan estos modelos son [10] y [19] . En la actualidad, los problemas asociados a estos modelos surgen en la estimación parámetrica debido a la complejidad en la construcción de la función de verosimilitud exacta.

La segunda herramienta es desarrollar los modelos de volatilidad estocástica en tiempo continuo al utilizar el cálculo fraccional. Este enfoque es la generalización natural de los proce-

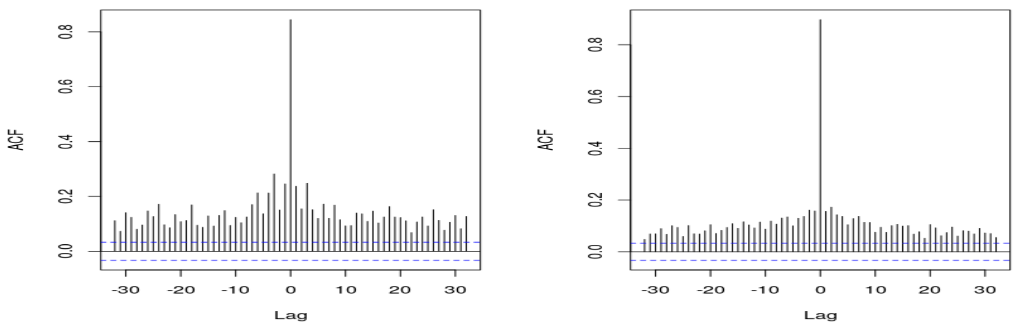

Figura 4: Relación entre rendimientos absolutos y al cuadrado. A la izquierda ITLUP, a la derecha UBI.

sos de difusión utilizados en los mercados financieros con el fin de valuar derivados financieros. Por lo general, se utilizan procesos de difusión para modelar la evolución de la volatilidad basados en ecuaciones diferenciales estocásticas que presentan como base de incertidumbre al movimiento Browniano fraccional. La mayor dificultad en estos procesos son la gran variedad de procesos resultantes, que en su gran mayoría no presentan fórmulas cerradas y deben ser calculadas mediante aproximación numérica. A esto se le adiciona que si los modelos son paramétricos la inferencia debe realizarse mediante datos discretos, especialmente en presencia de variables de estado no observables y serialmente correlacionadas. En la actualidad, la literatura presenta una gran cantidad de trabajos que estudian los proceso de volatilidad con alta persistencia, entre ellos se destacan [13] y [16].

Desde nuestra perspectiva, una buena estrategia de estudio es generar modelos de volatilidad estocástica mediante la utilización de los procesos denominados Ornstein-Uhlenbeck fraccionarios. Estos procesos se definen como las soluciones de la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = -\lambda X_t dt + \sigma dB_t^H \quad \text{siendo} \quad \lambda, \sigma > 0.$$

El parámetro σ gobierna la dispersión del movimiento Browniano fraccional, mientras que λ se interpreta de manera similar al parámetro θ en un modelo AR(1). Estos procesos se definen en [12], se prueba que la ecuación tiene una única solución estacionaria definida en todo $\mathbb{R}$, que es dada mediante la igualdad

$$X_t = \int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda(t-s)} dB_s^H; \quad \forall t. \tag{4}$$

Se prueba que el proceso es de memoria larga si y sólo si $H > 1/2$ y además se destacar que el caso $H = 1/2$ es el proceso de Ornstein-Uhlenbeck estándar ([36]). Más recientemente en [23], se define una generalización de los procesos $\mathrm{FOU}(\lambda, \sigma, H)$ llamados $\mathrm{FOU}(\lambda_1, \lambda_2, \sigma, H)$ mediante la composición del operador integral definido en la ecuación (4) para distintos valores de λ. Se demuestra que para el caso en el cual se compone el operador con dos valores de $\lambda's$ distintos ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) los $\mathrm{FOU}(\lambda_1, \lambda_2, \sigma, H)$ tienen dependencia de corto alcance cualquiera sea el valor de H, pero que si hacemos $\lambda_1 \to 0$, entonces $\mathrm{FOU}(\lambda_1, \lambda_2, \sigma, H) \to \mathrm{FOU}(\lambda_2, \sigma, H)$ que tiene dependencia de largo alcance para el caso en el cual $H > 1/2$. Por lo tanto estos procesos tienen la interesante propiedad de ir desde la memoria de corto alcance a la de largo alcance en la medida que se modele con parámetros λ_2 cercanos a cero.

5. Conclusiones

En el trabajo se realiza el análisis de la propiedad que se observa empíricamente en las series financieras denominada dependencia de largo alcance que puede derivarse en la complejidad de los diferentes sistemas financieros. En los modelos matemáticos más utilizados de mercados financieros la base de desarrollo es el movimiento browniano. Estos procesos y sus aplicaciones presentan como propiedad matemática importante el ser una semimartingala, lo que permite la utilización del área denominada cálculo estocástico. En las últimas décadas se generaron una gran cantidad de aplicaciones y avances en la ingeniería financiera, sin embargo algunas propiedades empíricas en series financieras no son posibles de explicar. El objetivo de este trabajo es proponer otro enfoque de modelización al contemplar el cálculo fraccional y establecer el rol importante que tiene el parámetro de Hurst H en los procesos estocásticos asociados. Se analiza la volatilidad de una variable macroeconómica de importancia en la deuda soberana en Uruguay y se observa la necesidad de utilizar modelos de dependencia de largo alcance. Para finalizar, se sugieren posibles modelos a utilizar tanto en tiempo discreto como en tiempo continuo que presentan esta característica.

Referencias

[1] Allen, E., *Modeling with Ito Stochastic Differential Equations.* Springer, 2006.

[2] Bacheliere, L., *Théorie de la spéculation.* Phd. Thesis, University of Paris, 1900.

[3] Beran J., *Statistics for Long Memory Processes.* Chapman and Hall, New York, 1994.

[4] Biagini ,F., Hu, Y., Oksendal, B. and Zhang, T., *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications.* Springer, 2006.

[5] Black, F.; Scholes, M., *The Pricing of Options and Corporate Liabilities.* Journal of Political Economy, Vol 81, No 3, 637-654, 1973.

[6] Blöchl, W., Theis, F., Vega-Redondo, F. and O'N. Fischer, E., *Vertex centralities in input-output networks reveal the structure of modern economies.* Phys. Rev. E 83 (4) pp 46-127, 2011.

[7] Bollerslev, T., *Generalized autoregressive Conditional Heterocedasticity.* History of Economic Thought Books, McMaster University Archive for Journal of Econometrics, 31, pp. 307-327, 1986.

[8] Bollerslev, T. and Mikkelsen, H., *Modeling and pricing long memory in stock market volatility.* Journal of Econometric, Vol. 73, pp. 151-184, 1996.

[9] Bouchaud, J., and Potters, M., *Theory of Financial Risks: From Statistical Physics to Risk Management.* Cambridge University Press, 2000.

[10] Breidt, F., Crato N. and de Lima, P., *The detection and estimation of long memory in stochastic volatility.* Journal of Econometrics, 83, pp. 325-348, 1998.

[11] Brigo, D. and Mercurio, F., *Interest Rate Models Theory and Practice with Smile, Inflation and Credit.* Second Edition Springer Verlag, 2006.

[12] Cheridito, P., Kawaguchi, H. & Maejima, M., *Fractional Ornstein-Uhlenbeck Processes.*,Electronic Journal of Probability, 8(3): 1-14,2003.

[13] Chronopoulou, A. and Viens, F., *Estimation and pricing under long-memory stochastic volatility.* Annals of Finance, Vol. 8, pp. 379-403, 2012.

[14] Engle, F., *Autoregressive Conditional Heterocedasticity whit Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation.* History of Economic Thought Books, McMaster University Archive for Econometrica, 50, 4, pp. 987-1008, 1982.

[15] Ghysels, E., Harvey, A. and Renault, E., *Stochastic Volatility.* Handbook of Statistics, Vol. 14, pp. 119-191, 1996.

[16] Gloter, A. and Hoffmann, M., *Stochastic Volatility and fractional Brownian motion.* Stochastic Processes and their Applications, Vol. 113, pp. 143-172, 2004.

[17] Granger, C. W. J. and Joyeux, R., *An introduction to long memory time series models and fractional differencing.* J. Time Ser. Anal., l(1), pp. 15-29, 1980.

[18] Graves, T., Gramacy, R., Watkins, N. and Franzke, C. *A Brief History of Long Memory: Hurst, Mandelbrot and the Road to ARFIMA, 1951–1980.* Entropy, Vol. 19, 2017.

[19] Harvey, A., *Long memory in stochastic volatility.* Forecasting Volatility in Financial Markets, pp. 307-320, 1998.

[20] Hasslett, J. and Raftery, E., *Space-time modelling with long memory dependence: Assessing Ireland's win power resource.* Journal of Applied Statistics, Vol 38, pp. 1-50, 1989.

[21] Heston, S., *A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options.* Review of Financial Studies, Society for Financial Studies, Vol. 6, 2, pp. 327-343, 1993.

[22] Hurst, H., *The long term storage capacity of reservoirs.* Transactions of the American Society of Civil Enginiers, 1116, pp. 770-808, 1951.

[23] Kalemkerian, J. and León, J.R., *Fractional iterated Ornstein-Uhlenbeck Processes,* ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. 16, pp 1105-1128, 2019.

[24] Kolmogorov, A., *Wienersche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen Raum.* C. R. Acad. Sci. URSS, pp. 115-118, 1940.

[25] Lima, L., and Xiao, Z., *Is there long memory in financial time series?* Applied Financial Economics, Vol 20, 6, pp. 487-500, 2013.

[26] Mandelbrot, B. B., *Limit theorem of the self-normalized range for weakly and strongly dependent processes*, Z.Wahr. geb., 31, 271-285, 1975.

[27] Mandelbrot, B., *Une classe processus stochastiques homothétiques a soi: application a la loi climatologique H. E. Hurst.* C.R. Acad. Sci. Paris, pp. 3274-3277, 1965.

[28] Mandelbrot, B. and Wallis, J., *Robustness of the rescaled range R/S in the measurement of noncyclic long run statistical dependence.* Water Resour. Res. 5, pp. 967–988, 1969.

[29] Merton, R., *On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates.* Journal of Finance, Vol 22, pp.449-470, 1974.

[30] Musiela, M. and Rutkowski M., *Martingale Methods in Financial Modeling.* Second Edition, Springer, 2005.

[31] Niu, H., and Wang, J., *Volatility clustering and long memory of financial time series and financial price model.* Digital Signal Processing, Vol 23, 2, pp. 489-498, 2013.

[32] Palma, W., *Long Memory Time Series-Theory and Methods*, John Wiley, Hoboken, NJ, 2007.

[33] Petty, W., *Political arithmetick.* History of Economic Thought Books, McMaster University Archive for the History of Economic Thought, 1690.

[34] Taqqu, M.S., Teverovsky, M. and Willinger, W., *Estimators for long range dependence: an empirical study.*, Fractals, Vol 3, pp. 785-788, 1995.

[35] Theodossiou, P., *Financial Data and the Skewed Generalized T Distribution.* Management Science, Vol. 44, 12, pp. 1650–1661, 1998.

[36] Uhlenbeck, G.E. & Ornstein, L.S., On the theory of Brownian Motion, *Physical Review* 36, pp. 823-841, 1930.