MODELOS DE CRECIMIENTO POBLACIONAL

Luisa L. Lazzari
Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas
Instituto Interdisciplinario de Economía Política
luisalazzari@gmail.com

Estructura de la exposición

i) Introducción

ii) Ley de crecimiento biológico

iii) Casos de aplicación de la función exponencial y exponencial modificada

iv) Función logística

v) Casos de aplicación de la función logística

vi) Otras áreas de aplicación

Introducción

Numerosos problemas vinculados con distintas ciencias están relacionados con las poblaciones y sus cambios a través del tiempo.

Crecimiento de una población: aumento o decrecimiento en su tamaño.

Para analizar el crecimiento de una población nos centraremos en:

i) número de individuos que la componen y

ii) la velocidad con que esta cantidad cambia con el tiempo.

El concepto matemático que subyace detrás del crecimiento de poblaciones de todo tipo es el de crecimiento geométrico o exponencial.

Comprenderlo puede ayudar a entender la magnitud de los problemas que causa y a medir la efectividad de las políticas diseñadas para enfrentarlos o para hacer variar los patrones de crecimiento.

Las funciones exponenciales se utilizan en: finanzas, arqueología, psicología, industria, economía, biología, etc.

Ley de crecimiento biológico

Algunas leyes de crecimiento biológico se pueden representar por

$$N = N_0\, e^{k\,t}$$

N_0: número inicial de individuos de la población $(t = 0)$

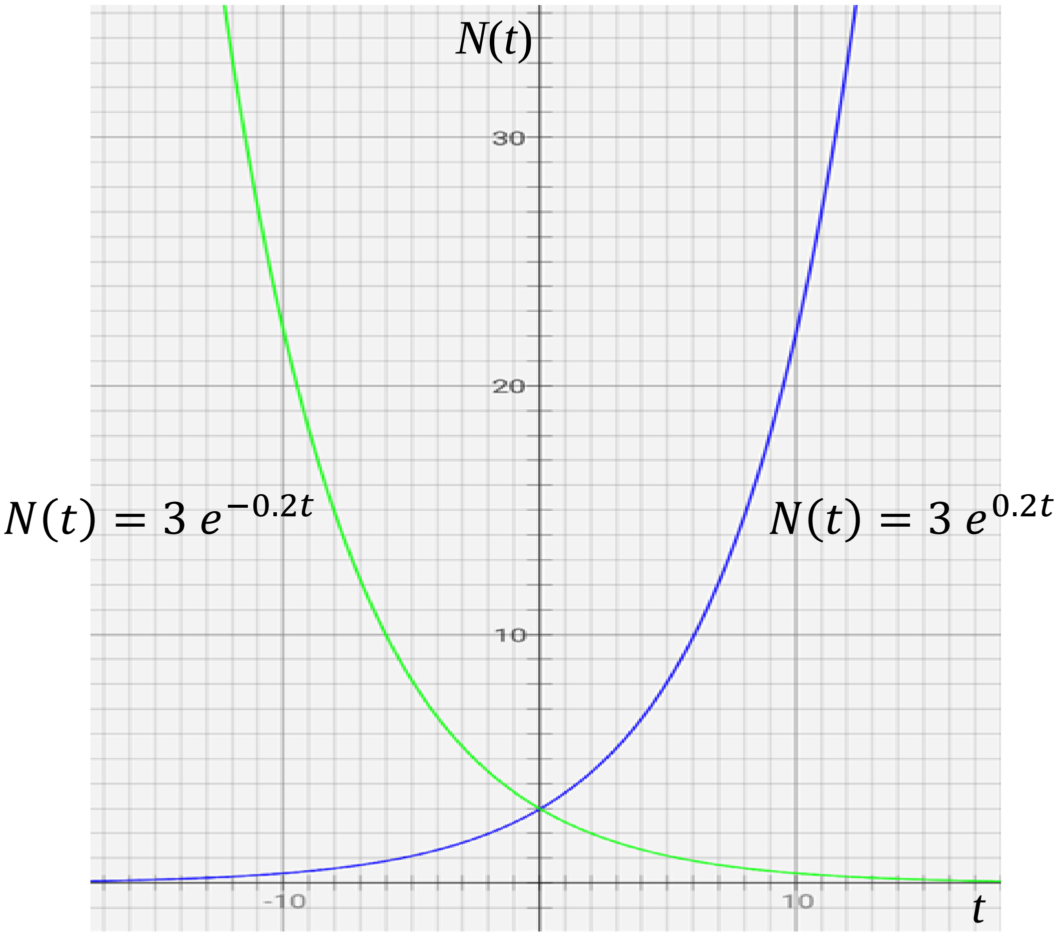
k: constante

En el tiempo t la velocidad de crecimiento o razón de cambio $\dfrac{dN}{dt}$ de la población es proporcional al número de individuos de la misma.

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

Si $k > 0$ el número N de individuos sigue una ley de **crecimiento exponencial**.

Si $k < 0$ el número N de individuos sigue una ley de **decrecimiento exponencial**.



$t \geq 0$

En este seminario analizaremos modelos de crecimiento poblacional que utilizan funciones exponenciales, exponenciales modificadas y logísticas mediante casos de estudio de diferentes áreas de aplicación.

Caso 1. Interés compuesto

Se invierten $10 000 a una tasa de interés anual de 6%.

a) Saldo después de 10 años si el interés se capitaliza continuamente.

$$M(t) = 10\,000\ e^{0.06t}$$

$$M(10) \cong \$\ 18\,221.2$$

1. Interés compuesto

b) Tiempo necesario para que se duplique la inversión

$$M(t) = 10\,000\; e^{0.06t}$$

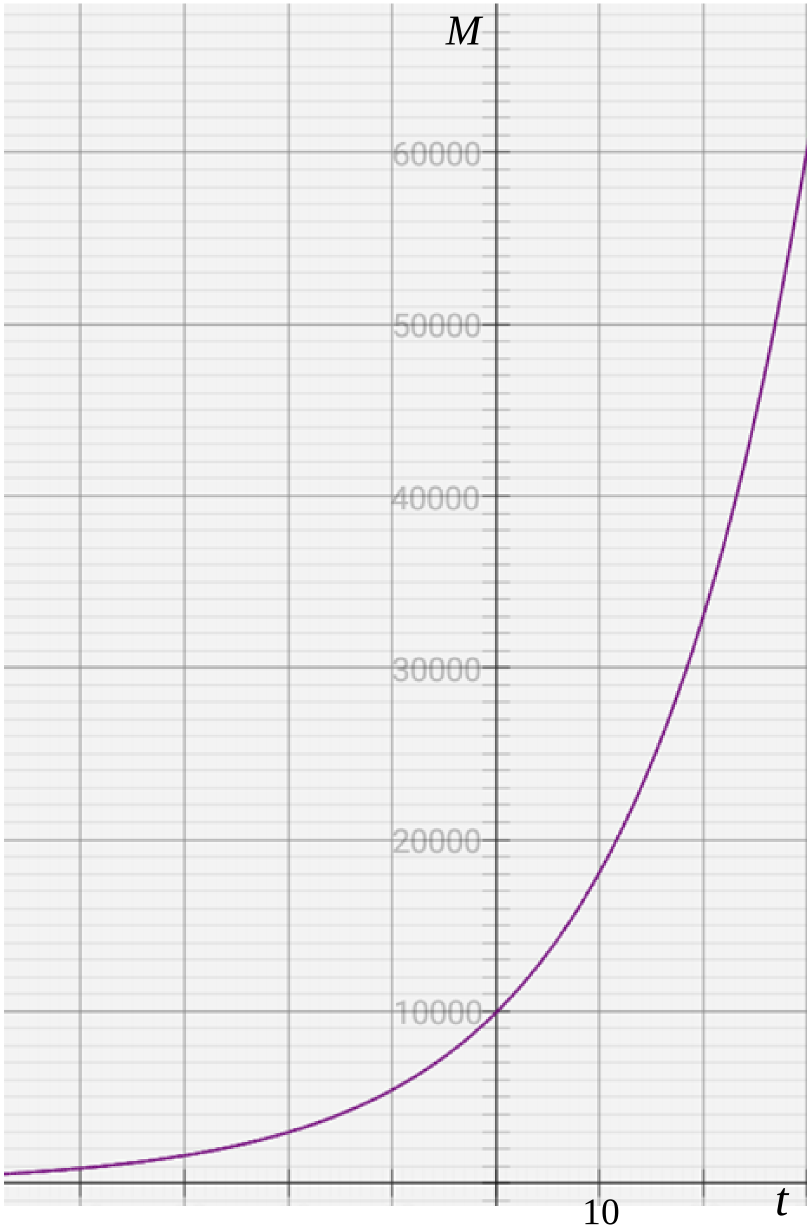
$$20\,000 = 10\,000\; e^{0.06t}$$

$$t = \frac{ln2}{0.06} \cong 11.55$$

11 años 6 meses 18 días

$$\boldsymbol{N = N_0\; e^{k\,t}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{t = \frac{ln2}{k}}}$$



Caso 2. Crecimiento de una población

Se estima que la población de cierta ciudad dentro de *t* años será de

$$N(t) = 50\,000\, e^{0.05\, t}$$

a) Población actual

$$t = 0$$

50 000 habitantes

2. Crecimiento de una población

$$N(t) = 50\,000\, e^{0.05\, t}$$

b) Población dentro de 5 años

$$N(5) = 50\,000\, e^{0.25} \cong 64\,201$$

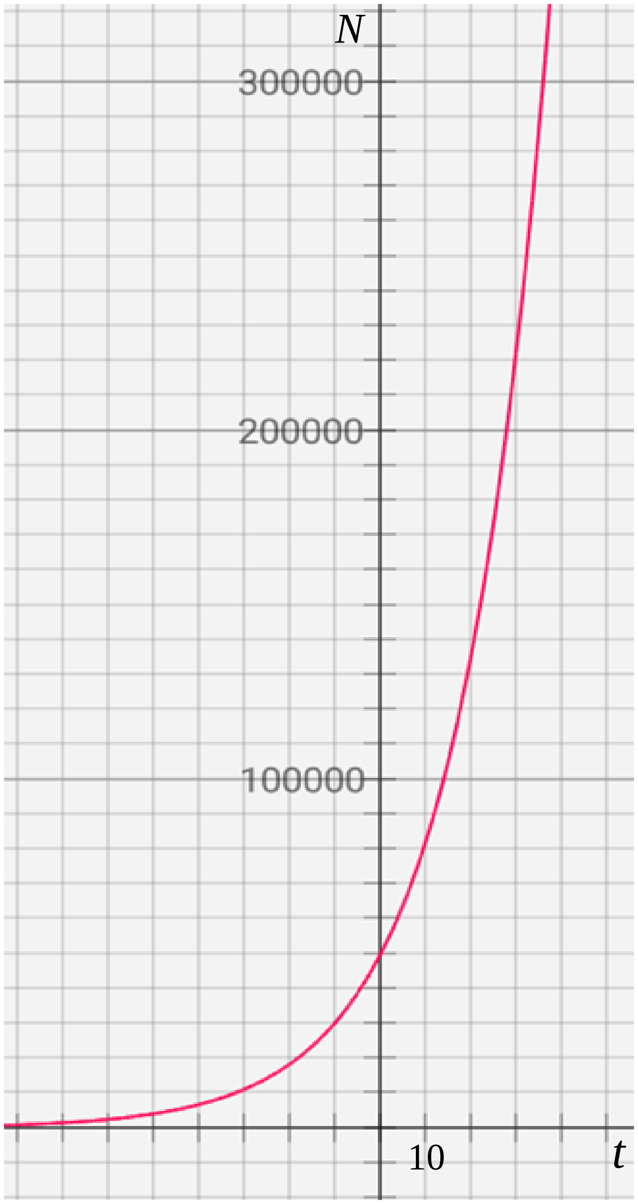
c) Tiempo necesario para que se duplique la

población $N(t) = 100\,000$

$$\boldsymbol{t = \frac{ln2}{k}}$$

$$t = \frac{ln2}{0.05} \cong 13.862$$

$t \cong 13$ años 10 meses 10 días



Caso 3. Confiabilidad de un producto

Un estudio estadístico indica que la fracción de tostadoras eléctricas fabricadas por cierta empresa que funcionan correctamente después de t años de uso es aproximadamente

$$f(t) = e^{-0.2\,t}$$

a) Fracción de tostadoras que se espera que funcionen al menos durante tres años

$$f(3) = e^{-0.6} \cong 0.5488$$

3. Confiabilidad de un producto

$$f(t) = e^{-0.2\,t}$$

b) Fracción de tostadoras que se espera que falle antes de un año de uso

$$f(1) = e^{-0.2} \cong 0.8187$$

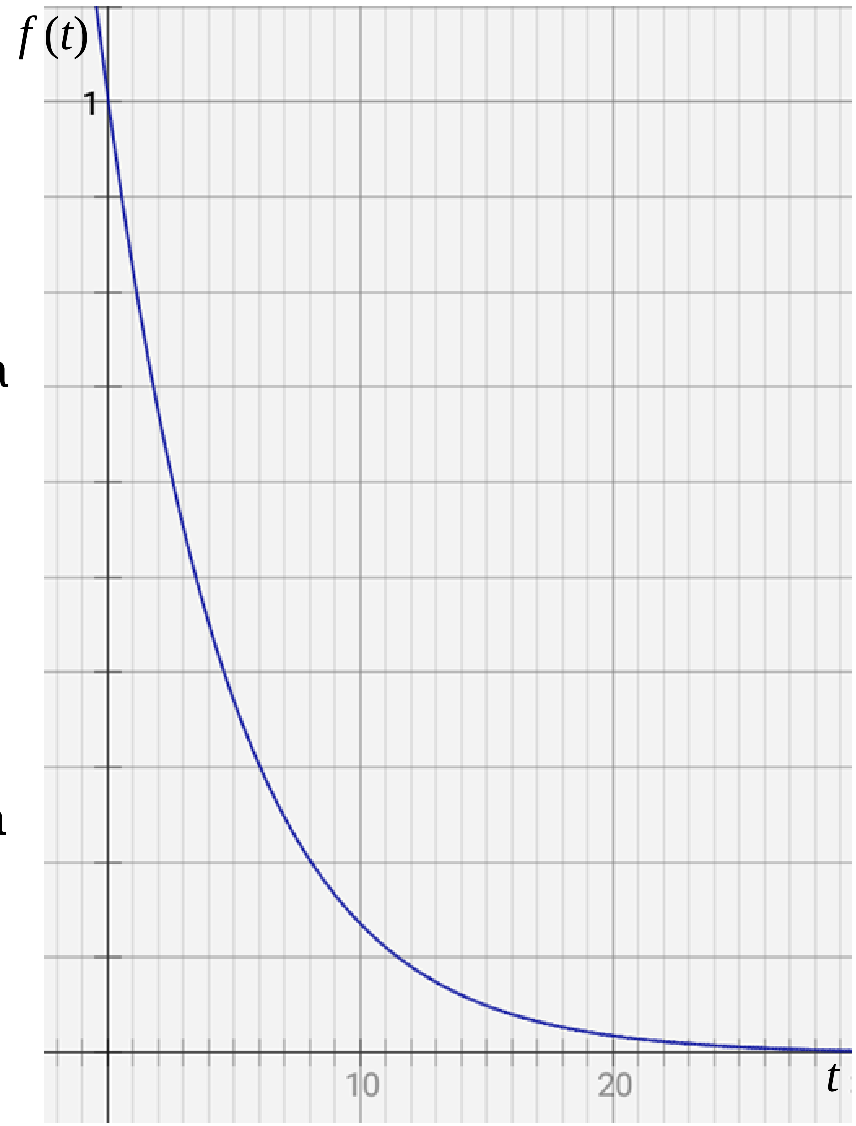
$$1 - 0.8187 = 0.1813$$

Aprox. 0.1813 de las tostadoras

c) Fracción de tostadoras que se espera que falle durante el tercer año de uso

$$f(2) - f(3) = 0.6703 - 0.5488$$

Aprox. 0.1215 de las tostadoras

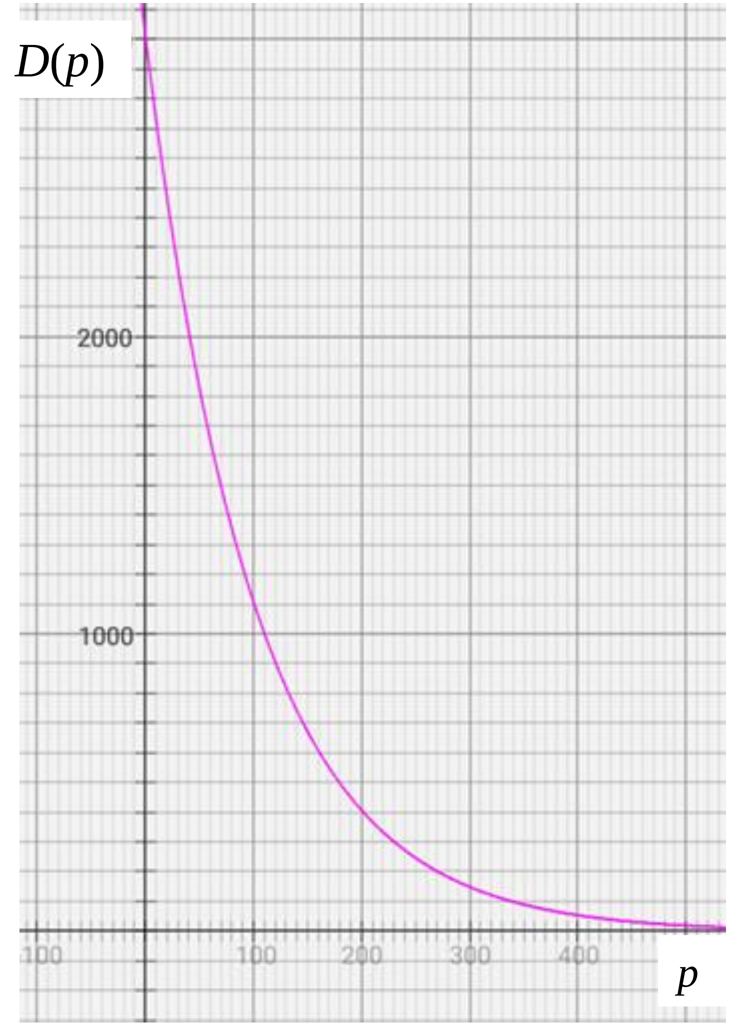


Caso 4. Demanda del consumidor

La demanda de cierto bien es

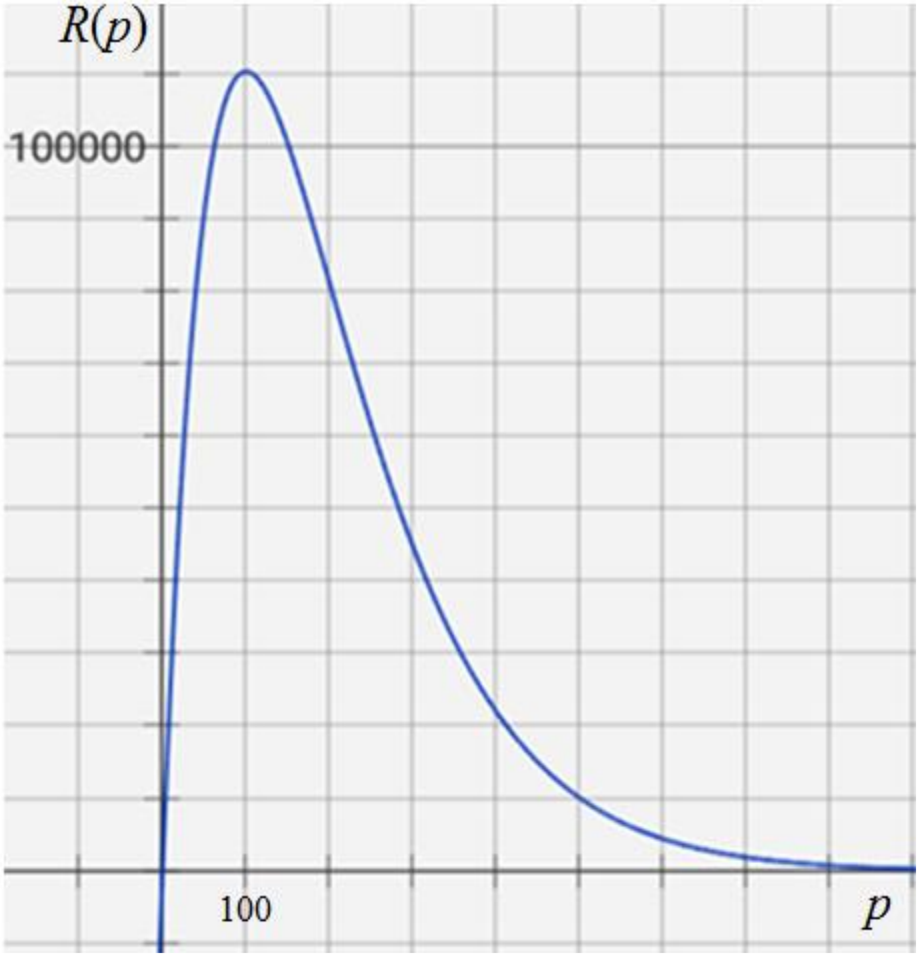
$$D(p) = 3\,000\, e^{-0.01\, p}$$

unidades por mes cuando el precio del mercado es *p* dólares por unidad.



4. Demanda

$$R(p) = 3\,000\, p\, e^{-0.01\,p}$$



a) Ingreso

$$R(p) = p\,.\,D(p)$$

$$R(p) = 3\,000\, p\, e^{-0.01\,p}$$

b) Ingreso máximo

$$R'(p) = 3\,000\, e^{-0.01\,p}(1 - 0.01p)$$

$$R'(p) = 0$$

$$1 - 0.01p = 0$$

$$p = 100$$

$$R(100) \cong 110\,363.83$$

Caso 5. Depreciación

Cuando cierta máquina industrial tiene ***t*** años, su valor de reventa es

$$V(t) = 4\,800\, e^{-\frac{t}{5}} + 400 \text{ unidades monetarias}$$

a) La máquina nueva vale

$$V(0) = 5\,200 \text{ um}$$

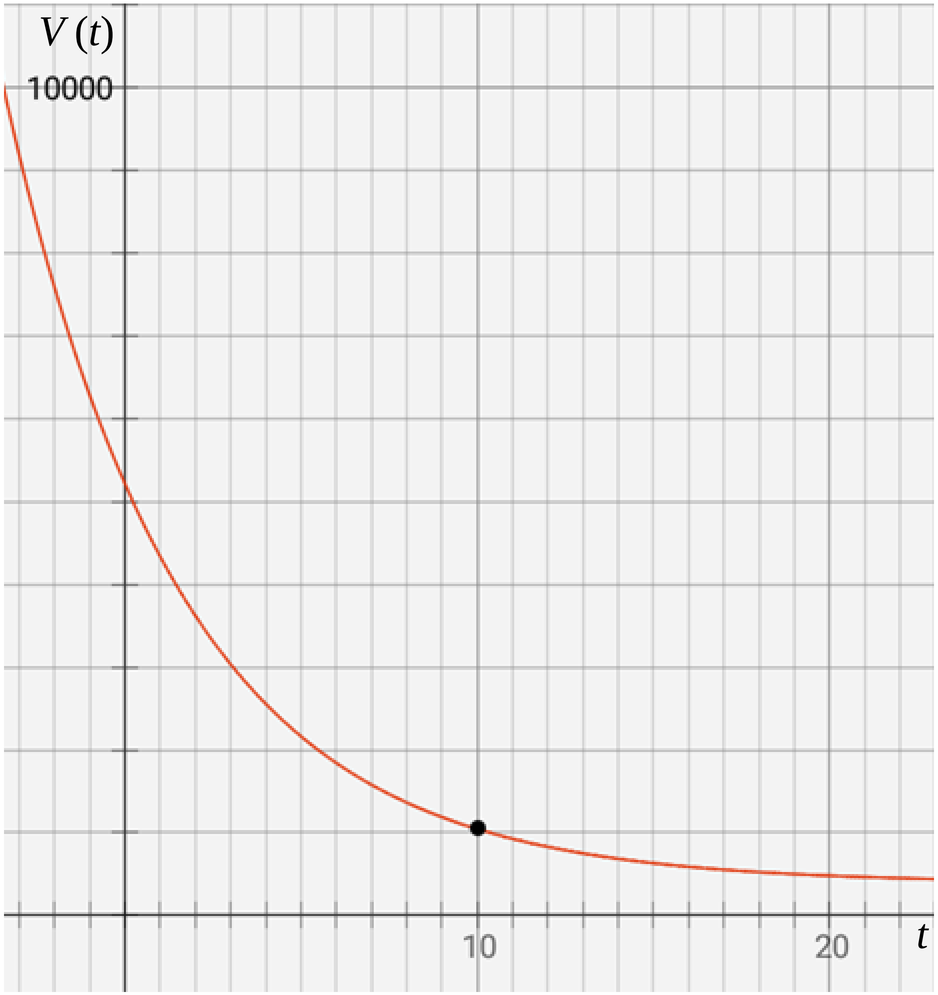
5. Depreciación

$$V(t) = 4\,800\, e^{-\frac{t}{5}} + 400$$

b) Valor de la máquina a
los 10 años

$$V(10) \cong 1\,049{,}61 \text{ um}$$

c) Cuando $t \to \infty$ el valor de la máquina tiende a 400 um



Caso 6. Publicidad

Muchas editoriales envían ejemplares de cortesía de libros nuevos a los profesores que enseñan los temas incluidos en esos libros.
Un editor estima que si se distribuyen ***x*** miles de ejemplares de cortesía a profesores de diferentes instituciones educativas, las ventas del primer año de cierto libro nuevo serán aproximadamente

$f(x) = 20 - 15\, e^{-0.2x}$ miles de ejemplares

a) Cantidad aproximada de libros que se venderán en el primer año si no se envían ejemplares de cortesía

$$f(0) = 20 - 15$$

Aproximadamente 5000 libros

6. Publicidad

$$f(x) = 20 - 15\, e^{-0.2x} \text{ (miles)}$$

b) Cantidad de libros que se venderán en el primer año si se envían 10 000 ejemplares de cortesía

$$f(10) = 20 - 15\, e^{-0.2} \cong 17.97$$

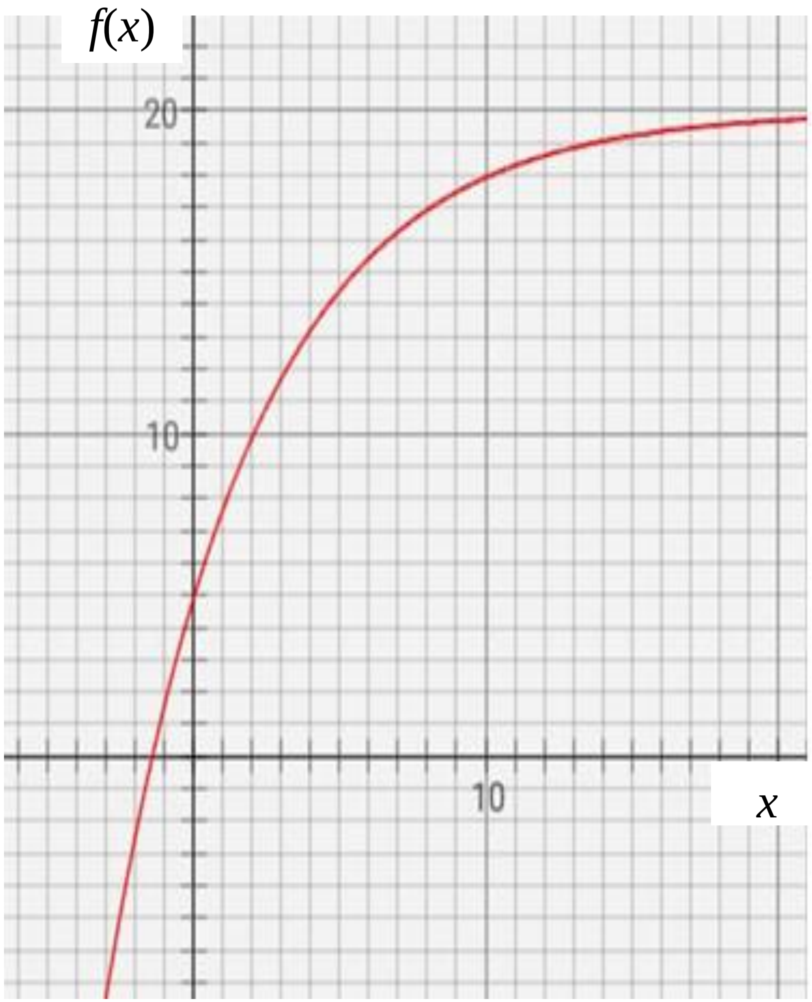
Aprox. 17 970 ejemplares

c) Incremento en las ventas del primer año si se distribuyen 1 000 ejemplares de cortesía más

$$f(11) = 20 - 15\, e^{-2.2} \cong 18.338$$

$$f(11) - f(10) = 0.368$$

Se venderán aproximadamente 368 ejemplares más



Caso 7. Tasa de mortalidad

La tasa de mortalidad de mujeres de cierta sociedad, en el grupo de edad entre 25 y 29 años, está dada por

$$D(t) = (0.008 - 0.00046)\, e^{-0.162\, t} + 0.00046$$

t es el número de años después de un año base fijo

0.008 es la tasa de mortalidad cuando $t = 0$

(8 muertes por cada 1000 mujeres)

Tasa de mortalidad de este grupo 10 años después

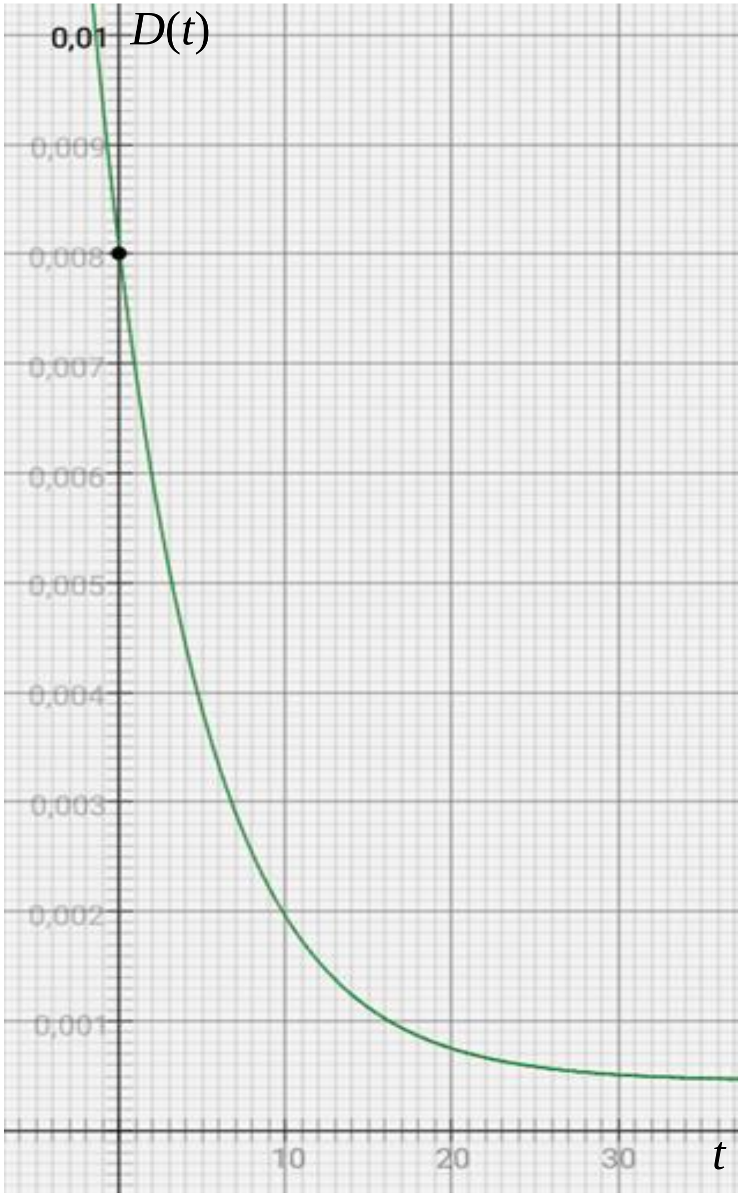
7. Tasa de mortalidad

$$D(t) = 0.00754\, e^{-0.162\, t} + 0.00046$$

tasa de mortalidad 10 años después

$$D(10) = 0.00754\, e^{-1.62} + 0.00046$$

$$D(10) = 0.00195$$



Caso 8. Ciencia forense

La temperatura T del cadáver de una víctima de homicidio encontrado en una habitación donde la temperatura era de $20°\text{C}$, está dada por:

$$T(t) = 20 + 17\, e^{-0.07\, t} \quad °\text{C}$$

Donde t es el número de horas posteriores a la muerte de la víctima.

a) Temperatura corporal de la víctima después de 10 horas

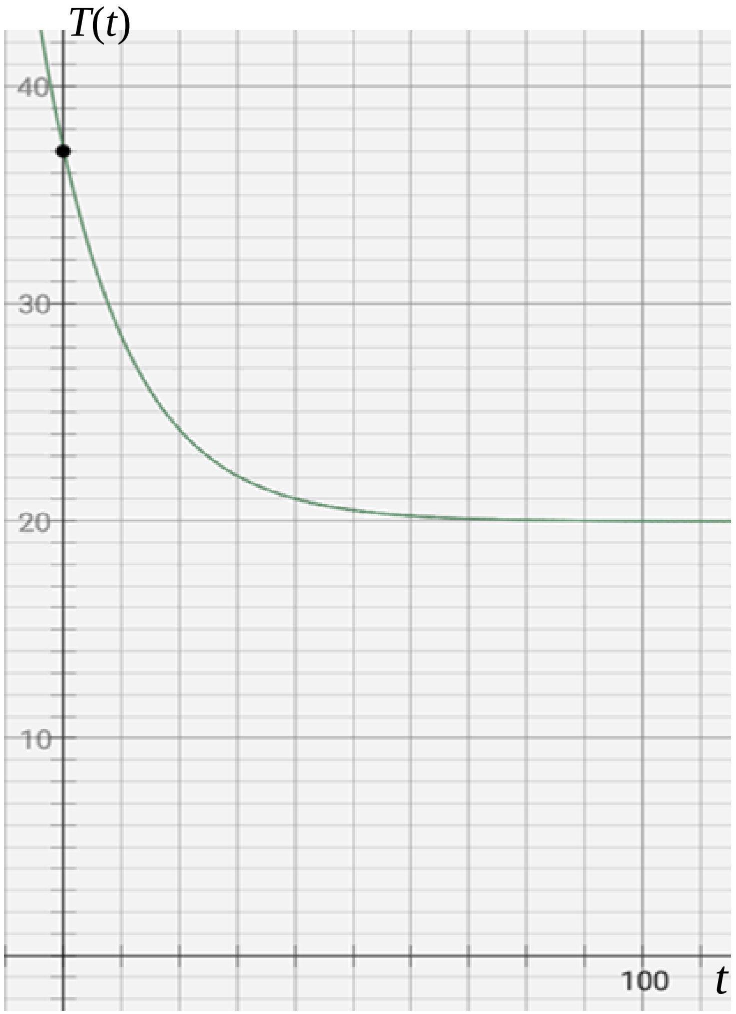
$$T(10) = 20 + 17\, e^{-0.7}$$

$$T(10) \cong 28.44 \quad °\text{C}$$

8. Ciencia forense

$$T(t) = 20 + 17\, e^{-0.07\, t}$$

b) Coartada que necesitará el empleado que lo encontró muerto, si a las 8:00 am cuando llegó la policía científica la temperatura del cadáver era de 33°C



Tiempo que transcurre para que la temperatura corporal llegue a 33°C

$$33 = 20 + 17\, e^{-0.07t}$$

$$t = \frac{\ln(17/13)}{0.07} \cong 3.83$$

Llevaba muerto 3h 50min aprox.

El empleado tiene que justificar que no pudo llegar a la escena del crimen antes de las 4:30 am

20° temperatura ambiente

Caso 9. Crecimiento de bacterias

Se introduce una toxina en una colonia de bacterias, y t horas después, la población está dada por

$$N(t) = 10\,000\,(8 + t)e^{-0.1t}$$

a) Población al introducir la toxina

$$N(0) = 10\,000\,(8 + 0)e^{-0.1\times 0}$$

$$N(0) = 80\,000$$

9. Crecimiento de bacterias

$$N(t) = 10\,000\,(8+t)e^{-0.1t}$$

b) Población a las 10 horas

$$N(10) = 10\,000\,(8+10)e^{-0.1\times 10}$$

$$N(10) \cong 66\,218.30$$

c) Población máxima

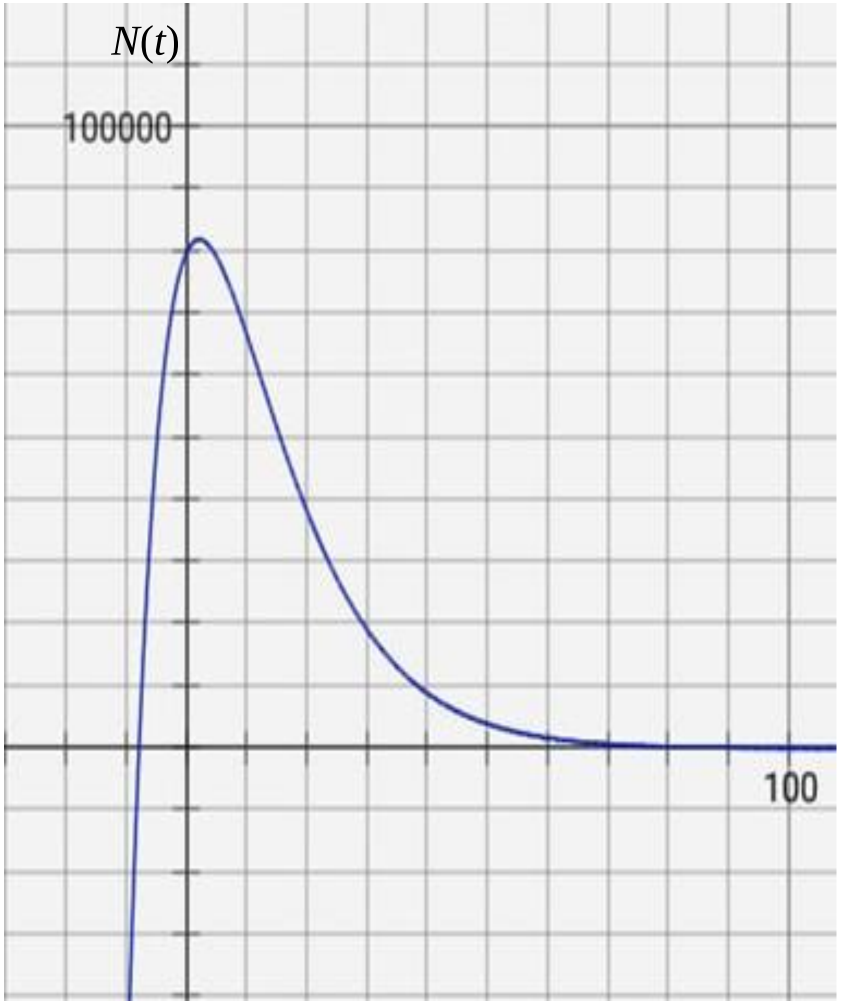
$$N'(t) = e^{-0.1t}\,(2\,000\ - 1\,000\,t) = 0$$

$$t = 2$$

$$N(2) \cong 81873$$

d) A largo plazo $\lim_{t\to\infty} N(t) = 0$

la población de bacterias desaparece.



Función logística

Bajo crecimiento exponencial una población crecería sin límites y llegaría a ser infinita con el paso del tiempo.

Pero cuando llega a ser suficientemente grande existen factores ambientales que retardan la velocidad de crecimiento tales como la disponibilidad de alimentos, los depredadores, la superpoblación.

Estos factores podrían ocasionar que la velocidad de crecimiento $\frac{dN}{dt}$ disminuya.

El tamaño de la población podría estar limitado a un número máximo M de individuos, soportados con los recursos disponibles.

En la propagación de una epidemia, M sería el número total de individuos susceptibles a la enfermedad (no vacunados, toda la comunidad).

$$\mathbf{0 < N < M}$$

Este modelo tendría inicialmente crecimiento exponencial e incluiría los efectos de la resistencia ambiental a grandes crecimientos de la población.

La velocidad de crecimiento se puede expresar como:

$$\frac{dN}{dt} = kN\left(\frac{M-N}{M}\right)$$

Para valores pequeños de N comparados con M, $\left(\frac{M-N}{M}\right) \to 1$ y el crecimiento sería aproximadamente exponencial.

Cuando $N \to M, (M-N) \to 0, \ \frac{dN}{dt} \to 0$

y el tamaño de la población tendería a estabilizarse

$$\frac{dN}{dt} = \frac{k}{M} N(M-N) \qquad \frac{dN}{dt} = A\, N(M-N)$$

$$\frac{dN}{dt} = AN(M - N)$$

La velocidad de crecimiento es proporcional al producto entre el tamaño de la población y la diferencia entre el valor máximo y el de la población.

Donde $\frac{k}{M} = A$ o sea $k = AM$

Si se resuelve esta ecuación diferencial (variables separables) luego de algunas sustituciones, se obtiene la **función logística**

$$N(t)/N: R \to R \qquad N(t) = \frac{M}{1 + b\, e^{-AMt}}$$

$$N(t) = \frac{M}{1 + b\, e^{-k\, t}}$$

Este modelo se conoce como modelo logístico de crecimiento de una población. Las predicciones basadas en este modelo resultan más cercanas a la realidad.

La razón de crecimiento $AN(M-N)$ se puede considerar función de N

será máxima cuando $\frac{d}{dN}[AN(M-N)]=0$

$$\frac{d}{dN}[AN(M-N)]=\frac{d}{dN}[A(MN-N^2)]$$

$$\frac{d}{dN}[AN(M-N)]=A[M-2N]=0 \qquad N=\frac{M}{2}$$

Es decir que la razón de crecimiento aumenta hasta que el tamaño de la población es $N=\frac{M}{2}$ (máxima velocidad de crecimiento) y después decrece.

$$N(t)=\frac{M}{1+be^{-kt}} \qquad \frac{M}{2}=\frac{M}{1+be^{-kt}}$$

$$t=\frac{lnb}{k}$$

$P=\left(\frac{lnb}{k},\frac{M}{2}\right)$ punto de inflexión

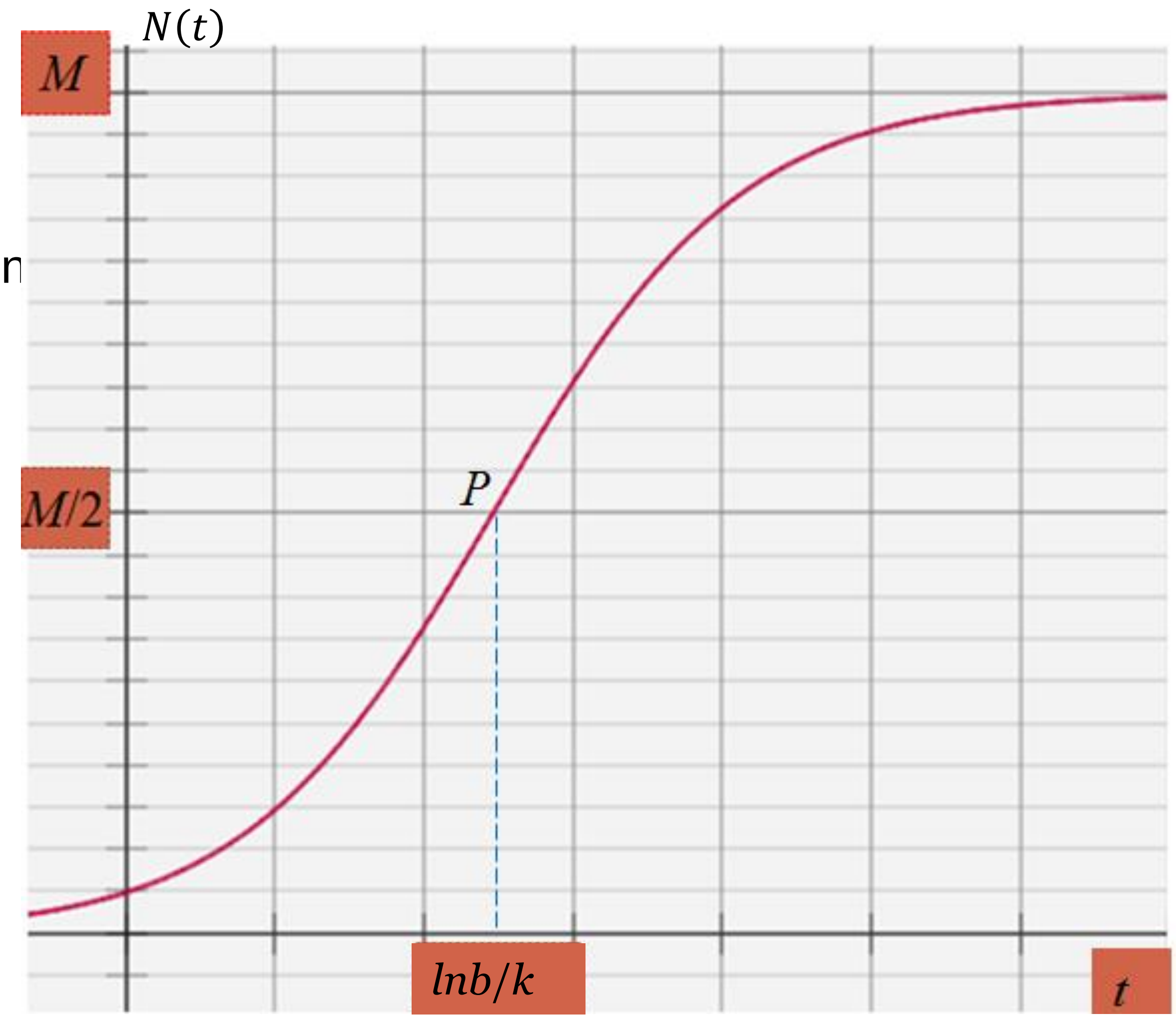
Función logística

$$N(t) = \frac{M}{1 + b\, e^{-k\,t}}$$

punto de inflexión

$$P = \left(\frac{lnb}{k}, \frac{M}{2}\right)$$

máxima velocidad de crecimien



asíntotas horizontales

$$N = 0$$

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{M}{1+b\, e^{-k\,t}} = 0$$

$$N = M$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M}{1 + b\, e^{-kt}} = M$$

La función logística tiene aplicaciones en una variedad de áreas, como redes neuronales artificiales, biología, química, demografía, economía, ciencias de la tierra, sociología, lingüística y estadística.

Fue nombrada en 1844 por Pierre Francois Verhulst, que la estudió en relación al crecimiento demográfico.

Caso 10. Propagación de una enfermedad

Los registros de salud pública indican que *t* semanas después de un brote de cierta forma de gripe, aproximadamente

$f(t) = \frac{20}{1+19e^{-1,2t}}$ miles de personas se habían contagiado la enfermedad.

a) Número de personas que tenían la enfermedad al inicio del control

$$f(0) = \frac{20}{1+19} = 1$$

$1\ 000$ personas tenían inicialmente la enfermedad

Número de personas que habrán contraído gripe 2 semanas después

$$f(2) = \frac{20}{1 + 19e^{-1,2.2}} \cong 7.343$$

aproximadamente $7\ 343$ personas

Caso10. Propagación de una enfermedad

$$f(t) = \frac{20}{1 + 19e^{-1,2t}}$$

b) Tiempo en que comenzó a descender la tasa de infección

punto de inflexión

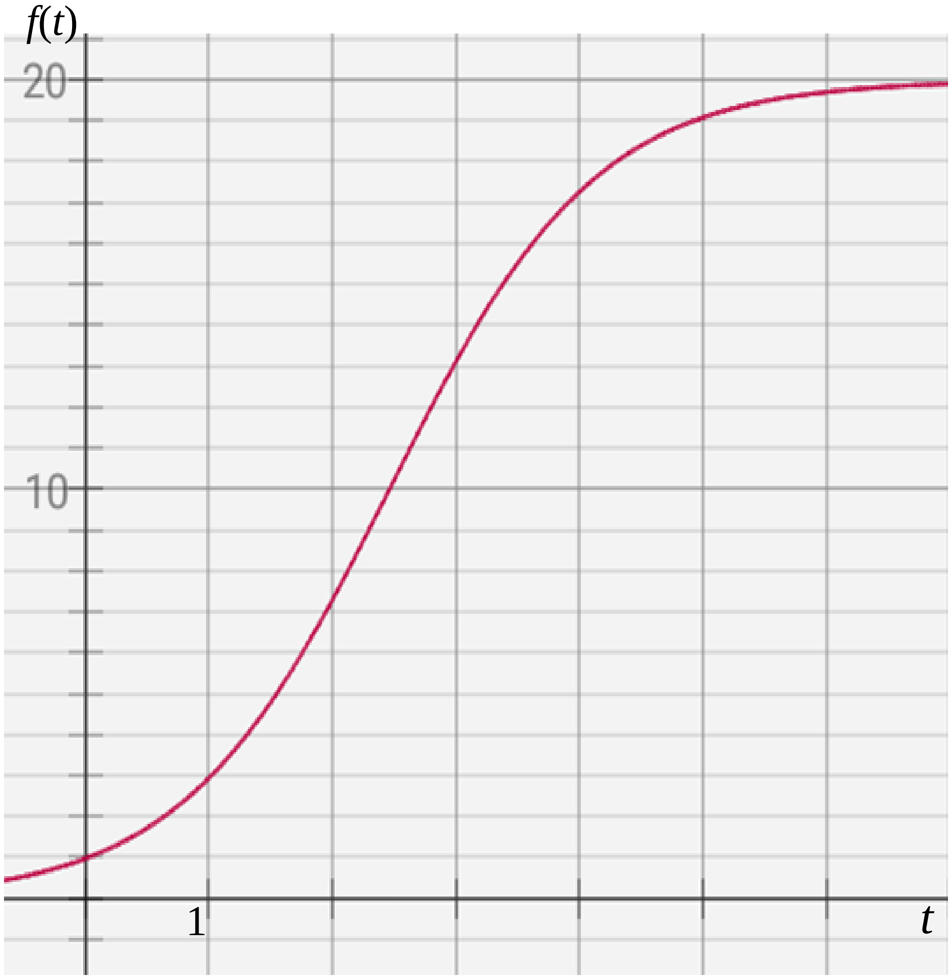
$$t = \frac{ln19}{1.2} \cong 2.454$$

la epidemia comienza a disminuir aprox. 2 semanas y media después de su inicio

c) Si la tendencia continúa, número aprox. de personas que contraerán la enfermedad en algún momento

$$\lim_{t \to \infty} \frac{20}{1 + 19\, e^{-1,2t}} = 20$$

20 000 personas podrán contraer la enfermedad en algún momento



11. Crecimiento de plantas

Dos plantas crecen de tal forma que t días después de plantarlas tienen una altura de $P_1(t)$ cm y $P_2(t)$ cm, respectivamente, donde

$$P_1(t) = \frac{21}{1 + 25e^{-0,3t}} \qquad P_2(t) = \frac{20}{1 + 17e^{-0,6t}}$$

a) Altura de las plantas a los 10 días

$P_1(10) = 9.35$ cm (aprox) $\qquad$ $P_2(10) = 19.19$ cm (aprox)

b) Cambio del sentido de la concavidad: puntos de inflexión

$$P = \left(\frac{lnb}{k}, \frac{M}{2}\right)$$

$F_1 = (10.73 , 10.5)$ $\qquad$ $F_2 = (4.72 , 10)$

11. Crecimiento de plantas

$$P_1(t) = \frac{21}{1 + 25e^{-0,3t}} \qquad P_1(0) \cong 0.81$$

$$P_2(t) = \frac{20}{1 + 17e^{-0,6t}} \qquad P_2(0) \cong 1.11$$

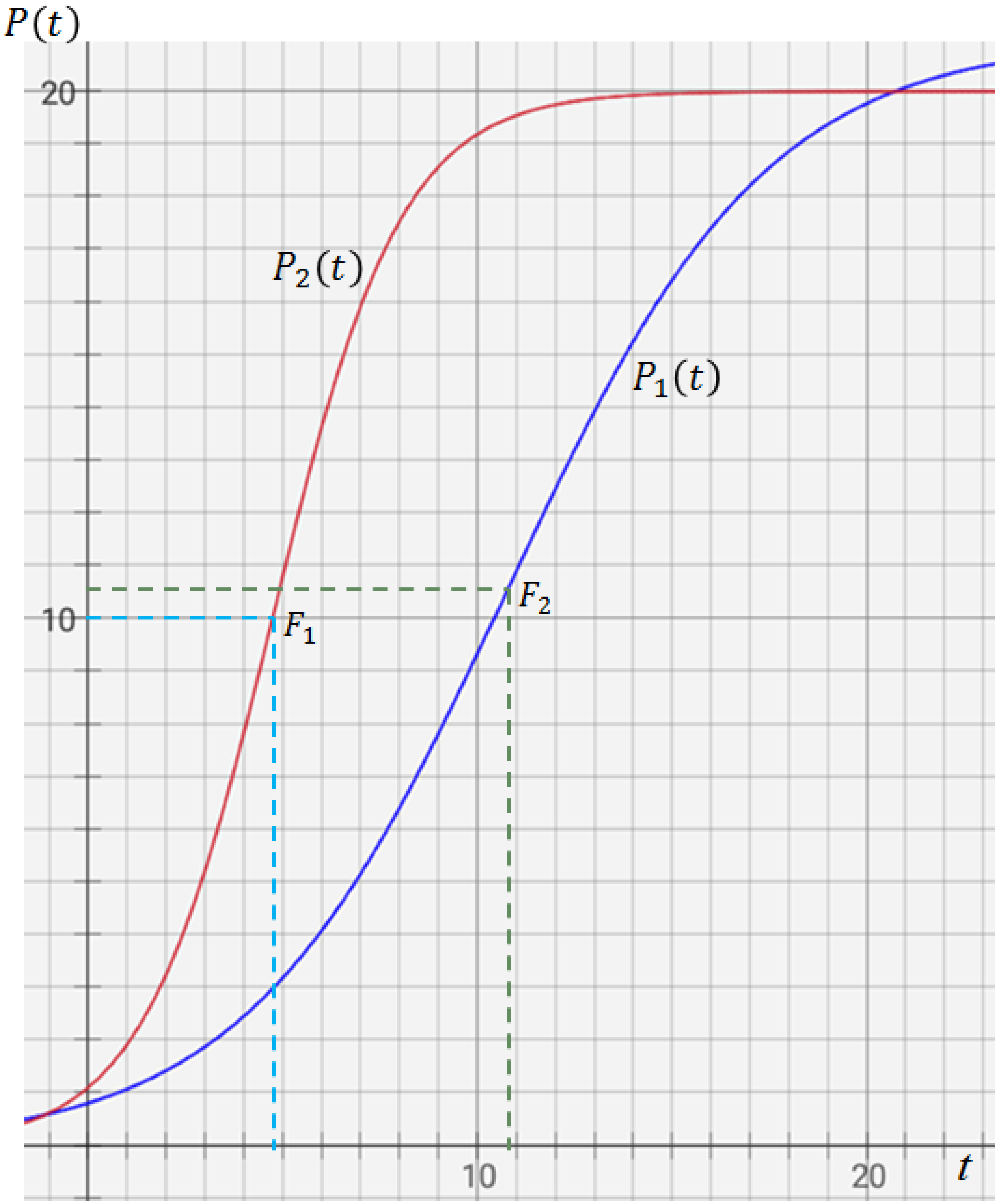
b) Las plantas tienen la misma altura, de 19.99 cm, después de 20.71 días.

$P_1(20.71) = P_2(20.71)$ = 19.99

c) La planta que crece más rápido en este momento es P_1

$P'_1(20.71) = 0.286$

$P'_2(20.71) = 0.0008$



Caso 12. Epidemia

En una ciudad de $100\ 000$ habitantes se detectó un brote de una nueva enfermedad.

Cuando el Ministerio de Salud comienza a registrar casos había 500 personas infectadas y una semana después había $1\ 000$.

Calcular el número estimado de personas infectadas 2 semanas después del inicio del registro, suponiendo un crecimiento logístico.

$$N(t) = \frac{M}{1 + be^{-k\,t}}$$

Caso 12. Epidemia

$$N(t) = \frac{M}{1 + be^{-k\,t}}$$

$$N(0) = 500$$

$$500 = \frac{100000}{1+b}$$

$$b \;= 199$$

$$N(1) = 1000 \qquad 1000 = \frac{100000}{1+199\,e^{-k}}$$

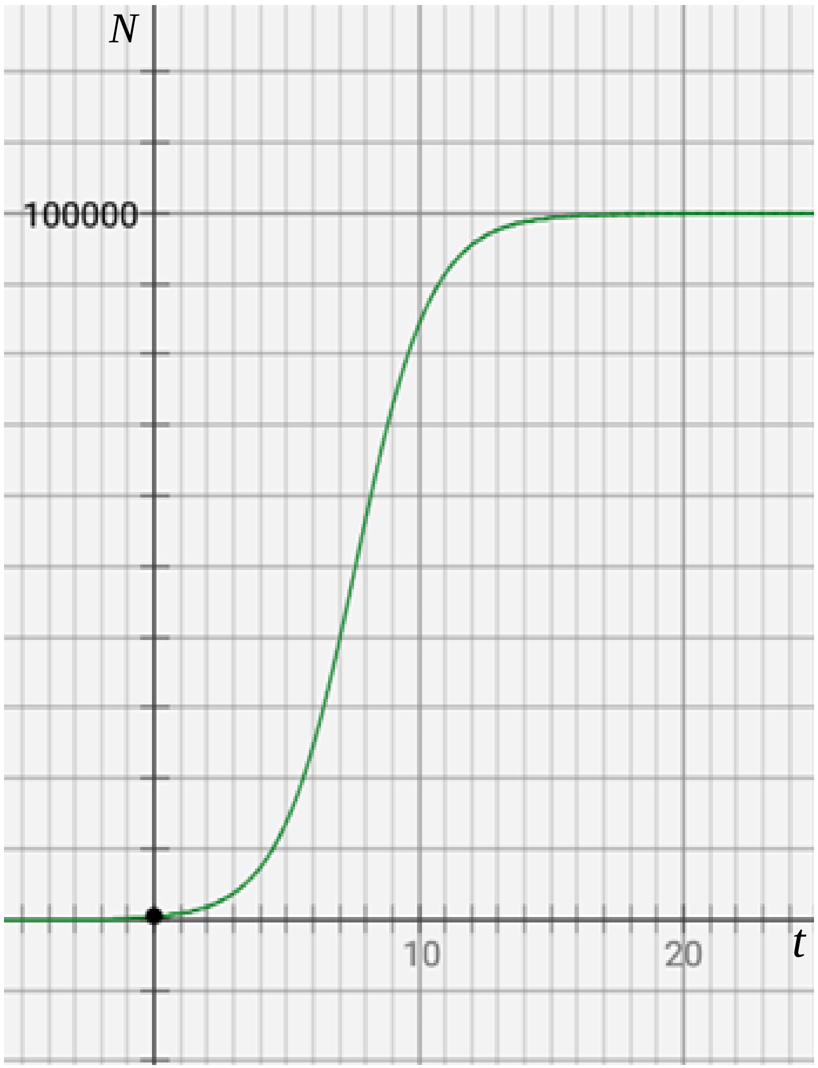
$$e^{-k} = \frac{99}{199}$$

$$N(2) = \frac{100000}{1 + 199\,(\frac{99}{199})^2}$$

$$N(2) = 1990$$

2 semanas después habrá

aprox. 1990 infectados



Caso 13. Crecimiento de una población

Se ha estimado que dentro de t años la población de cierto país estará dada por

$$P(t) = \frac{20}{2+3\,e^{-0.06t}} \text{ millones}$$

a) Población actual

$$P(0) = \frac{20}{2+3} = 4 \quad \text{millones}$$

Caso 13. Crecimiento de una población

$$P(t) = \frac{20}{2+3\,e^{-0.06t}}$$

b) Población dentro de 50 años

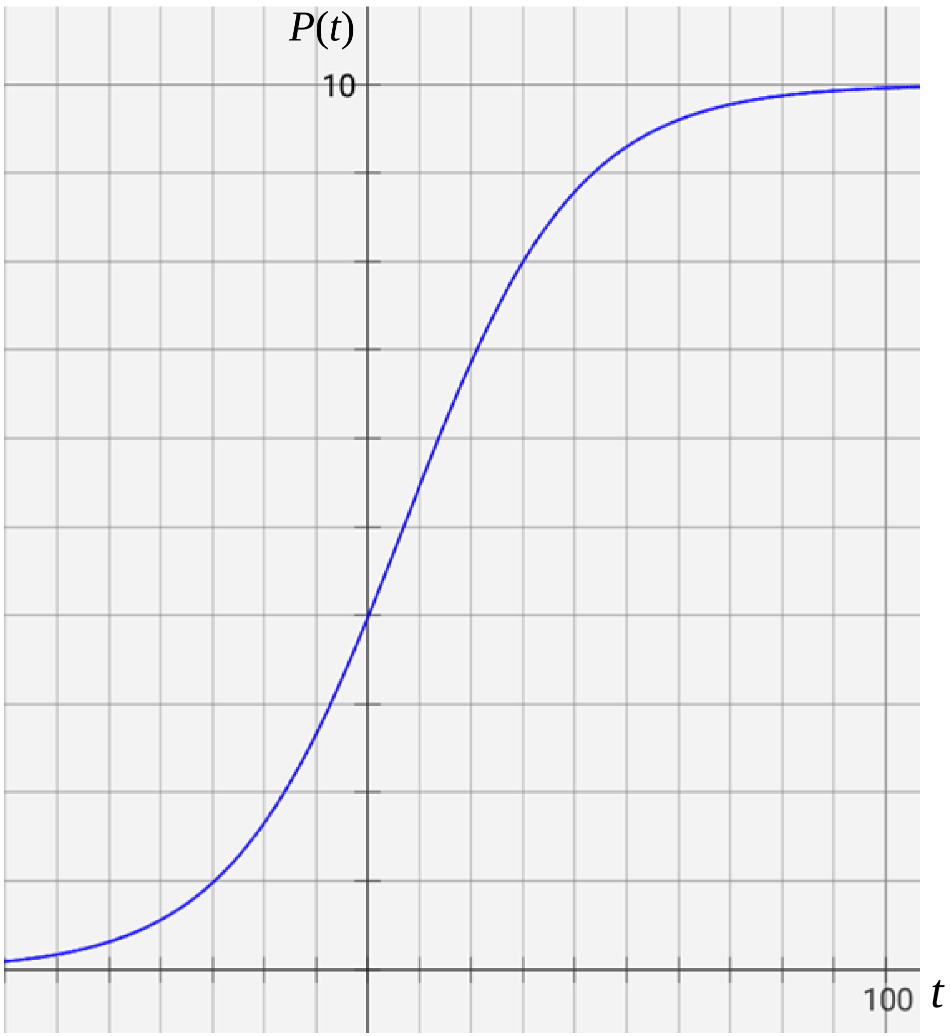
$$P(50) = \frac{20}{2+3\,e^{-0.06.50}}$$

9 305 000 individuos

c) Población a largo plazo

$$\lim_{t\to\infty} \frac{20}{2+3\,e^{-0.06t}} = 10$$

$P \longrightarrow$ 10 millones de habitantes



Otras aplicaciones de las funciones exponencial, exponencial modificada y logística

Ley de enfriamiento de Newton	Biología
Densidad de una población	Entomología
Reducción de ozono	Curvas de aprendizaje
Concentración de un medicamento	Radiactividad
Contaminación del aire	Presión del aire
Radiología	Demografía
Arqueología: datación por carbono	Falsificación en arte

Bibliografía

Budnick. F.S. (1990). *Matemáticas aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales.* Mc Graw Hill, México.

Chiang, A.C. (1994). *Métodos fundamentales de economía matemática*. Mc Graw-Hill, Madrid.

Garfunkel, S. (Director de Proyecto**)** (1999). *Las matemáticas en la vida cotidiana*. Addison-Wesley Iberoamericana y Universidad Autónoma de Madrid. Madrid.

Guedj, D. (1998). *El imperio de las cifras y los números.* Ediciones B y Gallimard. Trieste.

Haeussler, E.F.; Paul, R.S. (1997). *Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la Vida.* Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A., México.

Hoffmann, L.; Bradley, G.; Rosen, K. (2006). *Cálculo aplicado para Administración, Economía y Ciencias Sociales.* Mc Graw Hill, México.

Resolución de la ecuación diferencial

$$\frac{dN}{dt} = AN(M-N)$$

$$\frac{dN}{N(M-N)} = A\,dt$$

$$\int \frac{dN}{N(M-N)} = \int A\,dt$$

$$\frac{1}{M}\ln\left|\frac{N}{M-N}\right| = A\,t + C$$

$$\ln\left|\frac{N}{M-N}\right| = M\,A\,t + MC$$

Como $N > 0,\, M > 0$

$$\ln\frac{N}{M-N} = M\,A\,t + MC$$

$$\frac{N}{M-N} = e^{MAt+MC} = e^{MAt}e^{MC}$$

Se reemplaza la constante positiva e^{MC} por B

$$\frac{N}{M-N} = B\,e^{MAt}$$

Se despeja N

$$N = (M-N)B\,e^{MAt}$$

$$N = MB\,e^{MAt} - NB\,e^{MAt}$$

$$NB\,e^{MAt} + N = MB\,e^{MAt}$$

$$N(B\,e^{MAt} + 1) = MB\,e^{MAt}$$

$$N = \frac{MB\,e^{MAt}}{B\,e^{MAt} + 1}$$

Se opera algebraicamente:

$$N = \frac{M}{1 + \frac{1}{B}\,e^{-MAt}}$$

Si $\frac{1}{B} = b$ y $MA = k$

$$N(t) = \frac{M}{1 + be^{-kt}}$$

Muchas gracias!

luisalazzari@gmail.com